Równania Lagrange'a II r.
przykłady

dr inż. Sebastian Pakuła

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

31 marca 2016

e-mail: spakula@agh.edu.pl

Wzór:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \tag{1}$$

L – potencjał kinetyczny

$\dot{q}_i$ – prędkość uogólniona

q_i – współrzędna uogólniona

Q_i – siła uogólniona

Potencjał kinetyczny:

$$L = E - U$$

gdzie:
E – energia kinetyczna
U – energia potencjalna

Wskazówka: Jeśli energia kinetyczna nie zależy od współrzędnych uogólnionych to wzór (1) można zastąpić wzorem:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i}\right] + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \tag{2}$$

Gdy w układach występuje rozpraszani energii, wyraża się je przez tzw. *funkcję dyssypacji energii* – $D = \frac{1}{2}b\dot{x}^2$. Równanie Lagrange'a przyjmuje wówczas postać:

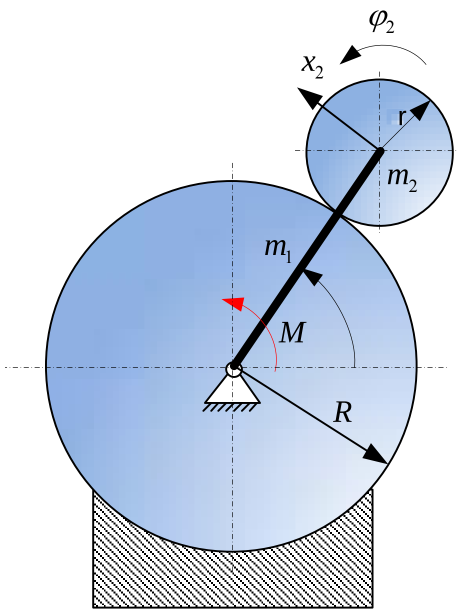
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \tag{3}$$

lub jeśli energia kinetyczna nie zależy od współrzędnej uogólnionej q (tzn. $\frac{\partial E}{\partial q} = 0$), to:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i}\right] + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \tag{4}$$

Poniżej przedstawię kilka przykładów wyznaczania dynamicznych równań ruchu za pomocą równań Lagrang'e II rodzaju.

Przykład 1: Wyznacz przyśpieszenia brył, korzystając z metody równań Lagrange'a II rodzaju.
Dane: m_1, m_2, R, r, M



Równania więzów:

$$\begin{cases} \varphi_1 (R+r) = x_2 \\ x_2 = \varphi_2 r \end{cases}$$

Współrzędna uogólniona:

$q = \{\varphi_1\}$

Przekształcone równania więzów:

$$\begin{cases} x_2 = \varphi_1 (R+r) \\ \varphi_2 = \varphi_1 \dfrac{(R+r)}{r} \end{cases}$$

Przemieszczenia wirtualne:

$$\begin{cases} \delta x_2 - \delta\varphi_1 (R+r) = 0 \\ \delta\varphi_2 - \delta\varphi_1 \dfrac{(R+r)}{r} = 0 \end{cases}$$

Praca wirtualna układu:

$\delta W = M\delta\varphi_1$, stąd siła uogólniona:

$Q_{\varphi_1} = M$

Momenty bezwładności figur wynoszą odpowiednio:

$$J_1 = \frac{m_1(R+r)^2}{3}, J_2 = \frac{m_2 r^2}{2}$$

Energia kinetyczna układu:

$$E = \frac{1}{2}\left[J_1\dot{\varphi_1}^2 + m_2\dot{x_2}^2 + J_2\dot{\varphi_2}^2\right] = \frac{1}{2}\dot{\varphi_1}^2\left[J_1 + m_2(R+r)^2 + J_2\frac{(R+r)^2}{r^2}\right]$$

Energia potencjalna układu:

$$U = m_1 g\frac{(R+r)}{2}\sin(\varphi_1) + m_2 g(R+r)\sin(\varphi_1)$$

Pochodne energii:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot{\varphi}_1}\right) = \ddot{\varphi}_1\left[J_1 + m_2(R+r)^2 + J_2\frac{(R+r)^2}{r^2}\right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi_1} = m_1 g\frac{(R+r)}{2}\cos(\varphi_1) + m_2 g(R+r)\cos(\varphi_1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi_1} = g(R+r)\cos(\varphi_1)\left[\frac{m_1}{2} + m_2\right]$$

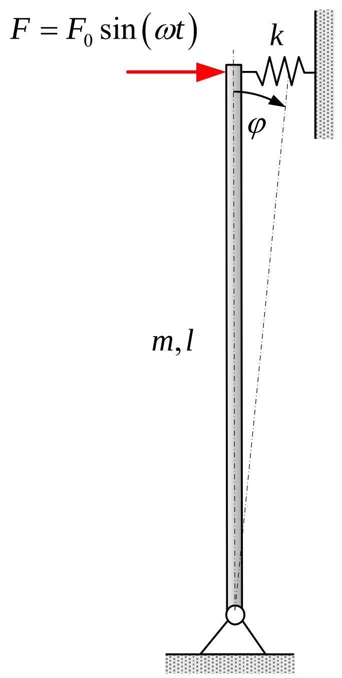
Po podstawieniu pochodnych do równań Lagrange'a:

$$\ddot{\varphi}_1\left[J_1 + m_2(R+r)^2 + J_2\frac{(R+r)^2}{r^2}\right] + \left[\frac{m_1}{2} + m_2\right] g(R+r)\cos(\varphi_1) = M$$

Ostatecznie przyspieszenie:

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{M - \left[\frac{m_1}{2} + m_2\right] g\,(R+r)\cos(\varphi_1)}{J_1 + m_2(R+r)^2 + J_2\frac{(R+r)^2}{r^2}}$$

Przykład 2: Wyznacz różniczkowe równanie ruchu belki korzystając z metody równań Lagrange'a II rodzaju.
Dane: m, l, k, ω, F_0



Równania więzów:

Brak

Współrzędna uogólniona:

$q = \{\varphi\}$

Praca wirtualna układu:

$\delta W = F\delta\varphi r$, stąd siła uogólniona:

$Q_\varphi = Fr$

Momenty bezwładności belki:

$$J_1 = \frac{ml^2}{12}$$

Energia kinetyczna układu:

$$E = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$$

Energia potencjalna układu:

$$U = mg\frac{l}{2}\cos(\varphi) + \frac{k(\varphi l)^2}{2}$$

Pochodne energii:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = J\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = -mg\frac{l}{2}\sin(\varphi) + k\varphi l \cong \left(k - \frac{mg}{2}\right)\varphi l$$

Po podstawieniu pochodnych do równań Lagrange'a:

$$J\ddot{\varphi} + \left(k - \frac{mg}{2}\right)\varphi l = F_0 l \sin(\omega t)$$

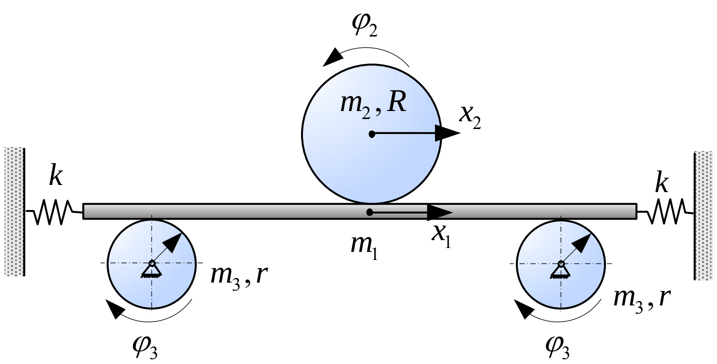
$$\ddot{\varphi} + \frac{3\left(k - \frac{mg}{2}\right)}{ml}\varphi = \frac{3F_0}{ml}\sin(\omega t)$$

Powyższe równanie można sprowadzić do postaci różniczkowego równania ruchu wymuszonych drgań harmonicznych:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = A \sin(\omega t)$$

gdzie:
ω_0^2 – częstość drgań własnych,
A – amplituda.

Przykład 3: Wyznacz różniczkowe równanie ruchu belki korzystając z metody równań Lagrange'a II rodzaju.
Dane: m_1, m_2, m_3, R, r, k



Równania więzów:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_3 r \\ x_2 + \varphi_2 R = x_1 \end{cases}$$

Współrzędne uogólnione:

$q = \{x_1, \varphi_2\}$

Energia kinetyczna:

$$E = \frac{1}{2}\left[m_1\dot{x}_1^2 + J_2\dot{\varphi}_2^2 + m_2\dot{x}_2^2 + 2J_3\dot{\varphi}_3^2\right]$$
$$E = \frac{1}{2}\left[m_1\dot{x}_1^2 + J_2\dot{\varphi}_2^2 + m_2\left(\dot{x}_1^2 - \dot{\varphi}_2 R\right)^2 + 2\frac{J_3}{r^2}\dot{x}_1^2\right]$$

Energia potencjalna:

$$U = 2\left(\frac{kx_1^2}{2}\right)$$

Pochodne:

$\{\mathbf{x_1}\}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}_1}\right) = \left(m_1 + m_2 + \frac{2J_3}{r^2}\right)\ddot{x}_1 - m_2\ddot{\varphi}_2 R$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 2kx_1$$

$\{\boldsymbol{\varphi_2}\}$

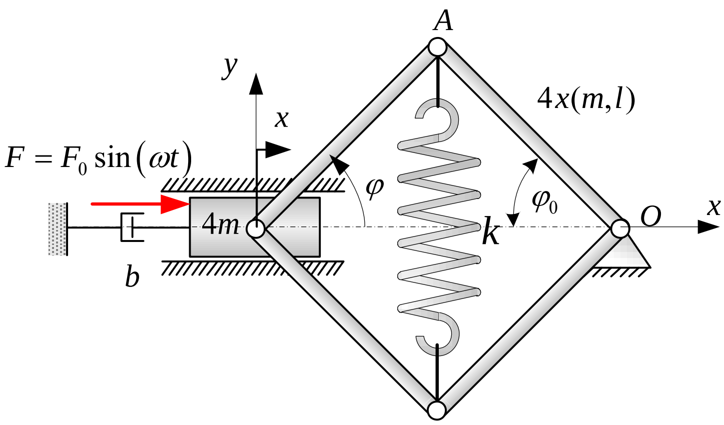
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) = \left(J_2 + m_2R^2\right)\ddot{\varphi}_2 - m_2R\ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = 0$$

Ostatecznie otrzymujemy układ dwóch równań różniczkowych:

$$\begin{aligned}\left(m_1 + m_2 + \frac{2J_3}{r^2}\right)\ddot{x}_1 - m_2\ddot{\varphi}_2 R + 2kx_1 &= 0\\ \left(J_2 + m_2R^2\right)\ddot{\varphi}_2 2 - m_2R\ddot{x}_1 &= 0\end{aligned}$$

Przykład 4: Wyznacz różniczkowe równanie ruchu belki korzystając z metody równań Lagrange'a II rodzaju.
Dane: m, l, k, ω, F_0



Równanie więzu i pochodne:
$x = 2l\cos(\varphi_0) - 2l\cos(\varphi)$

$\dot{x} = 2l\sin(\varphi)\dot{\varphi}$

Współrzędna uogólniona:

$q = \{\varphi\}$

Przemieszczenia wirtualne:

$\delta x = 2l\sin(\varphi)\delta\varphi$

Praca wirtualna układu:

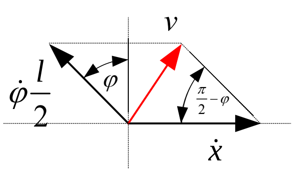
$\delta W = F\delta x$

$\delta W = F2l\sin(\varphi)\delta\varphi$

Siła uogólniona:

$Q_\varphi = F2l\sin(\varphi)$

Dwa ramiona czworoboku poruszają się ruchem obrotowym, a dwa pozostałe ruchem płaskim. Aby wyznaczyć energię ruchu płaskiego ramion, należy wyznaczyć prędkości środków ich mas. Można ją wyznaczyć z zasady superpozycji, której zastosowanie pokazano na rysunku:



Prędkość środka masy elementu łącznikowego v możemy policzyć z twierdzenia cosinusów.

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2\frac{l^2}{4} - 2\dot{x}\dot{\varphi}\frac{l}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2\frac{l^2}{4} - \dot{x}\dot{\varphi}l\sin\varphi$$

Moment bezwładności ramion mechanizmu względem osi przechodzących przez ich środki mas (główny moment bezwładności):

$J = \frac{ml^2}{12}$, a względem jego końca $J_0 = \frac{ml^2}{3}$

Energia kinetyczna:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}4m\dot{x}^2 + 2\left(\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mv^2\right) + 2\frac{1}{2}J_0\dot{\varphi}^2 \\ &= 2m\dot{x}^2 + \frac{ml^2}{12}\dot{\varphi}^2 + m\dot{x} + \frac{ml^2}{4}\dot{\varphi}^2 - m\dot{x}\dot{\varphi}l\sin\varphi + \frac{ml^2}{3}\dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{2}{3}ml^2\dot{\varphi}^2 - m\dot{x}\dot{\varphi}l\sin\varphi + 3m\dot{x}^2 \\ &= ml^2\dot{\varphi}^2\left(10\sin^2(\varphi) + \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Energia potencjalna:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}k\left[2\left(l\sin\varphi - l\sin\varphi_0\right)\right]^2 \\ &= 2kl^2\left(\sin\varphi - \sin\varphi_0\right) \end{aligned}$$

Uwaga: Energia kinetyczna zależy od współrzędnej uogólnionej φ, zatem nie można wykorzystać uproszczonego wzoru Lagrange, tylko należy zastosować wzór ogólny (3).

Potencjał kinetyczny L:

$$L = ml^2\dot{\varphi}^2\left(10\sin^2(\varphi) + \frac{2}{3}\right) - 2kl^2\left(\sin\varphi - \sin\varphi_0\right)$$

Pochodne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} &= 2ml^2\dot{\varphi}\left(10\sin^2(\varphi) + \frac{2}{3}\right) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) &= 2ml^2\ddot{\varphi}\left(10\sin^2(\varphi) + \frac{2}{3}\right) + 40ml^2\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi \\ &= 2ml^2\ddot{\varphi}\left(10\sin^2(\varphi) + \frac{2}{3}\right) + 20ml^2\dot{\varphi}\sin(2\varphi) \\ \frac{\partial L}{\partial\varphi} &= ml^2\dot{\varphi}^2 10\cdot 2\sin\varphi\cos\varphi - 4kl^2\left(\sin\varphi - \sin\varphi_0\right)\cos\varphi \\ &= 4l^2\sin\varphi\cos\varphi\left(5m\dot{\varphi} - k\right) + 4kl^2\sin\varphi_0\cos\varphi \\ &= 2l^2\sin(2\varphi)\left(5m\dot{\varphi} - k\right) + 4kl^2\sin\varphi_0\cos\varphi \\ \frac{\partial D}{\partial\varphi} &= 4bl^2\sin^2(\varphi)\dot{\varphi} \end{aligned}$$

Wstawiając pochodne do równania (3) otrzymujemy różniczkowe równanie ruchu układu:

$$\begin{aligned} &2ml^2\ddot{\varphi}\left(10\sin^2(\varphi) + \frac{2}{3}\right) + 20ml^2\dot{\varphi}\sin(2\varphi) - 2l^2\sin(2\varphi)\left(5m\dot{\varphi} - k\right) - 4kl^2\sin\varphi_0\cos\varphi \\ &\quad + 4bl^2\sin^2(\varphi)\dot{\varphi} = 2lF\sin\varphi \end{aligned}$$

lub po redukcji:

$$2ml^2\ddot{\varphi}\left(10\sin^2(\varphi)+\frac{2}{3}\right)+\sin(2\varphi)\left(10ml^2\dot{\varphi}+2kl^2\right)-4kl^2\sin\varphi_0\cos\varphi$$
$$+4bl^2\sin^2(\varphi)\dot{\varphi}=2lF_0\sin(\omega t)\sin\varphi$$