Mechanika Analityczna i Drgania

Równania d'Alemberta

dr inż. Sebastian Pakuła

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

mail: spakula@agh.edu.pl

Ogólne równanie więzów:

$$f_k(r_1,...,r_n,\dot{r}_1,...,\dot{r}_n,t)=0 \qquad \text{dla } k=1,...,w$$

$$\text{gdzie: } r_i = r_x\bar{i} + r_y\bar{j} + r_z\bar{k}$$

Podział więzów:

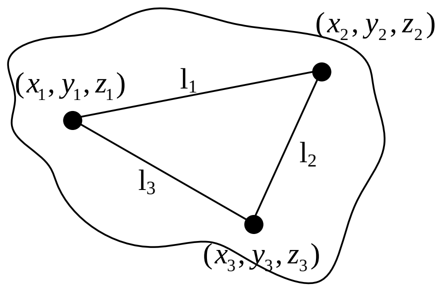
- geometryczne (holonomiczne) i kinematyczne (nieholonomiczne)
- skleronomiczne i reonomiczne

W więzach geometrycznych przemieszczenia wirtualne (przygotowane) są takie same jak przemieszczenia rzeczywiste. W przypadku więzów reonomicznych tak już nie jest. Przemieszczenia wirtualne są to przemieszczenia związane z więzami zamrożonymi (dla konkretnej chwili czasowej).

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f_n}{\partial x_i}\delta x_i = 0$$

Przemieszczenia:

RZECZYWISTE	WIRTUALNE
$x^2+y^2-r(t)^2=0$	$x^2+y^2-r(t)^2=0$
$2x\dot{x}+2y\dot{y}=2r\dot{r}$	$2x\partial x+2y\partial y=0$
$xdx+ydy=rdr$	$x\partial x+y\partial y=0$



Równania więzów:

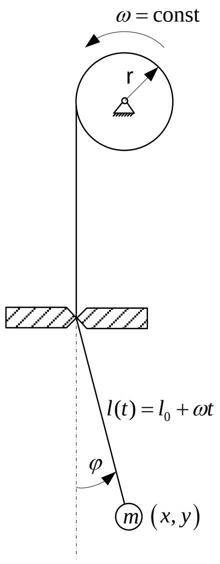
$$\begin{cases} f_1 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-l_1^2=0 \\ f_2 = (x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2-l_2^2=0 \\ f_3 = (x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2-l_3^2=0 \end{cases}$$

Liczba stopni swobody:

s =3 n - w *s=9-3=6*

Przykład 1.

Zapisać równanie więzu i sklasyfikować go, wyznaczyć przemieszczenia rzeczywiste i wirtualne punktu materialnego.



$x^2 + y^2 - l(t)^2 = 0$ - więz holonomiczno-reonomiczny

Przemieszczenia rzeczywiste:

$2x\dot{x} + 2y\dot{y} - 2l\dot{l} = 0$

$2x\dot{x} + 2y\dot{y} - 2(l_0 + r\omega t)r\omega = 0$

$xdx + ydy = ldl$

Przemieszczenia wirtualne:

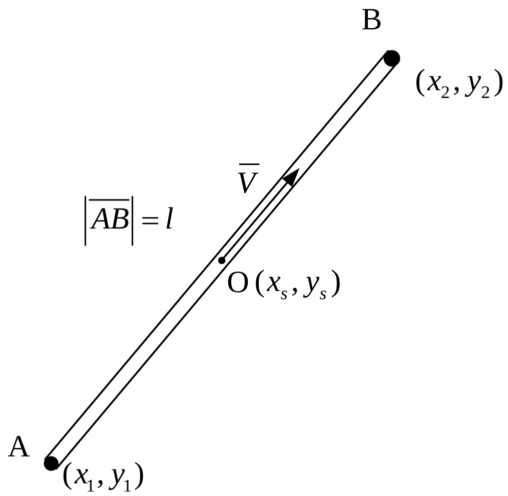
$2x\delta x + 2y\delta y = 0$

$\delta x = -\dfrac{y}{x}\delta y$

przemieszczenia rzeczywiste $\neq$ przemieszczenia wirtualne

Przykład 2.

Chłopiec porusza się po lodzie na jednej łyżwie. Kontakt łyżwy z lodem jest liniowy i uniemożliwia obrót łyżwy wokół osi pionowej. Określić równanie więzów narzucone na ruch łyżwy.



Równanie wiezów:

$\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 - l^2 = 0$

więz homologiczny-skleronomiczny

$x_s = \dfrac{x_2 - x_1}{2}, \quad y_s = \dfrac{y_2 - y_1}{2}$

$\dfrac{\dot{x}_s}{\dot{y}_s} = \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$

$\dot{x}_s\left(y_2 - y_1\right) - \dot{y}_s\left(x_2 - x_1\right) = 0$

więz nieholonomiczny-skleronomiczny

Zasada prac wirtualnych (przygotowanych) stosuje się w statycy czyli układach w położeniu równowagi.

Zasada d'Alemberta stosowana jest do układów holonomiczno-skleronomicznych w przypadku więzów idealnych dwustronnych. Mówi ona:

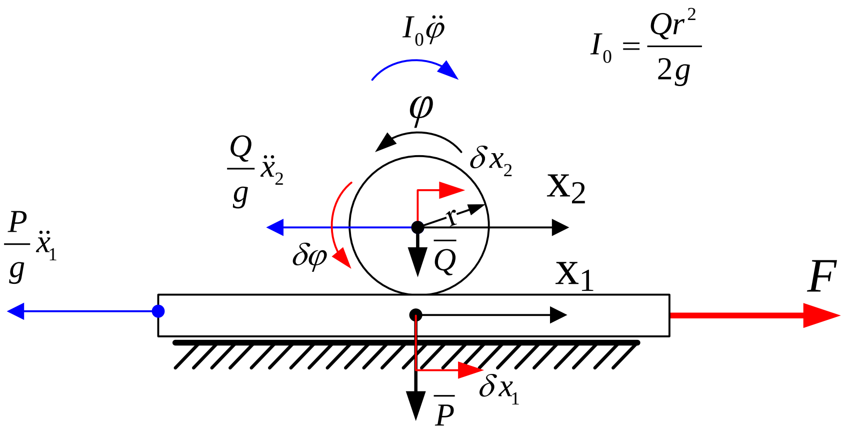
Zasada d'Alemberta

$$\delta L=\sum_{i=1}^{n}(P_i-m_i\ddot{r}_i)\delta r_i=0$$

$$\delta L=\sum_{i=1}^{n}\left[(P_{ix}-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i+(P_{iy}-m_i\ddot{y}_i)\delta y_i+(P_{iz}-m_i\ddot{z}_i)\delta z_i\right]=0$$

Przykład 1.

Znaleźć przyśpiesznie każdej z brył.



$$x_1=x_2+\varphi r$$

$$x_1-x_2-\varphi r=0 \qquad \delta x_1-\delta x_2-\delta\varphi r=0$$

$$\ddot{x}_2=\ddot{x}_1-\ddot{\varphi}r \qquad \delta x_2=\delta x_1-\delta\varphi r$$

$$\left(F-\frac{P}{g}\ddot{x}_1\right)\delta x_1-\left(\frac{Q}{g}\ddot{x}_2\right)\delta x_2-\left(I_0\ddot{\varphi}\right)\delta\varphi=0$$

$$\left(F-\frac{P}{g}\ddot{x}_1\right)\delta x_1-\frac{Q}{g}\left(\ddot{x}_1-\ddot{\varphi}r\right)\delta x_1-\frac{Q}{g}\left(\ddot{x}_1-\ddot{\varphi}r\right)R\delta\varphi-\left(I_0\ddot{\varphi}\right)\delta\varphi=0$$

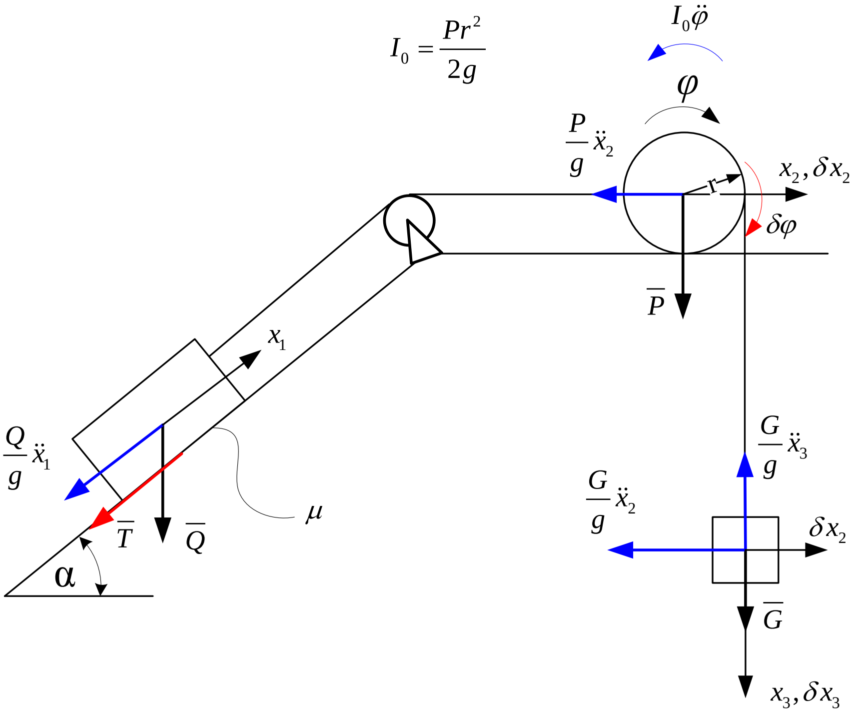
$$\left[F-\frac{P}{g}\ddot{x}_1-\frac{Q}{g}\ddot{x}_1+\frac{Q}{g}\ddot{\varphi}r\right]\delta x_1-\left[\frac{Q}{g}\ddot{x}_1-\frac{Q}{g}\ddot{\varphi}r+I_0\ddot{\varphi}\right]\delta\varphi=0$$

$$\begin{cases} F-\frac{P}{g}\ddot{x}_1-\frac{Q}{g}\ddot{x}_1+\frac{Q}{g}\ddot{\varphi}r=0 \\ \frac{Q}{g}\ddot{x}_1-\frac{Q}{g}\ddot{\varphi}r+I_0\ddot{\varphi}=0 \end{cases}$$

Ostatecznie rozwiązując układ równań i uwzględniając równania więzów:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}=\frac{2Fg}{(3P+Q)R} \\ \ddot{x}_1=\frac{3Fg}{3P+Q} \\ \ddot{x}_2=\frac{Fg}{3P+Q} \end{cases}$$

Przykład 2.



$$T = \mu Q\cos(\alpha)$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = \varphi r \\ x_3 = \varphi r \end{cases}, \quad \begin{cases} \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 = \ddot{\varphi} r \\ \ddot{x}_3 = \ddot{\varphi} r \end{cases}$$

$$\delta x = \delta x_1 = \delta x_2 = \delta x_3$$

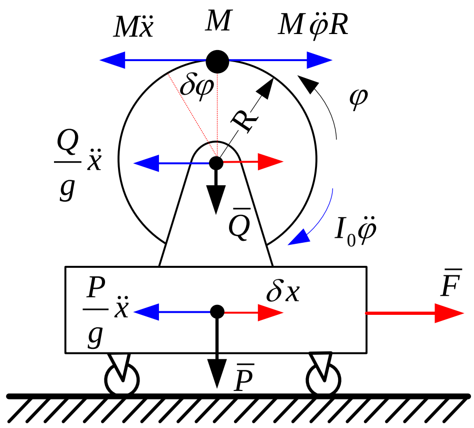
$$\delta x = \delta\varphi r$$

$$-\left(\frac{Q}{g}\ddot{x} + \mu Q\cos(\alpha) + Q\sin(\alpha)\right)\delta x - \frac{P}{g}\ddot{x}\delta x - \frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2\frac{\ddot{x}}{r}\frac{\delta x}{r} - \left(\frac{G}{g}\ddot{x} - G + \frac{G}{g}\ddot{x}\right)\delta x = 0$$

$$\ddot{x}\left(\frac{G}{g} + \frac{2}{3}\frac{P}{g} + \frac{2G}{P}\right) = G - Q(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)$$

$$\ddot{x} = \frac{G - Q(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)}{\frac{G}{g} + \frac{2}{3}\frac{P}{g} + \frac{2G}{P}}$$

Przykład 3.



$$-\left(\frac{P}{g}\ddot{x} + \frac{Q}{g}\ddot{x} + M\ddot{x} - M\ddot{\varphi}R - F\right)\delta x - \left(I_0\ddot{\varphi} + M\ddot{\varphi}R^2 - M\ddot{x}R\right)\delta\varphi = 0$$

$$\begin{cases} \ddot{x}\left(\frac{P}{g}+\frac{Q}{g}+M\right)=M\ddot{\varphi}+F \\ \frac{Q}{2g}R^2\ddot{\varphi}+M\ddot{\varphi}R^2=M\ddot{x}R \end{cases}$$

$$\ddot{\varphi}R=\frac{2M^2g\ddot{x}}{Q+2Mg}$$

$$\ddot{x}=\frac{Fg}{P+Q+Mg-\frac{2M^2g^2}{Q+2Mg}}$$