Zadania Kinematyka: Ruch płaski

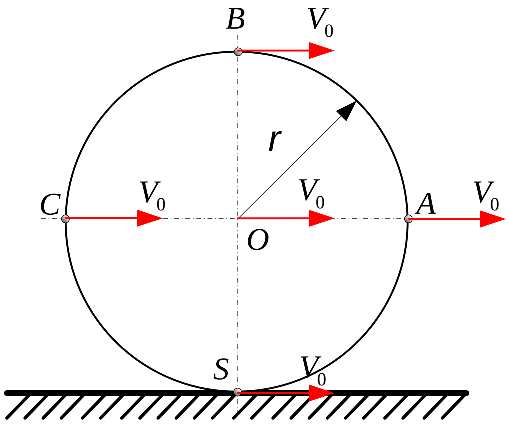
dr inż. Sebastian Pakuła

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

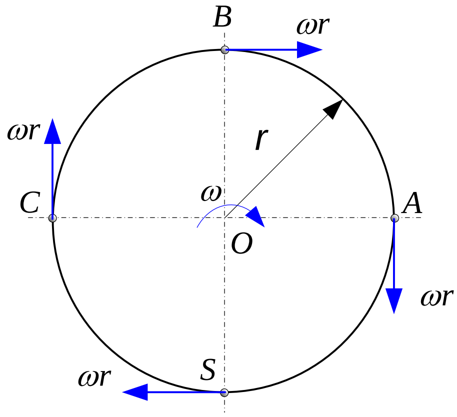
mail: spakula@agh.edu.pl

Przykład 1. Wyznaczyć prędkości punktów A,B,C,D na kole, które toczy się bez poślizgu. Prędkość środka koła wynosi V_0, a jego promień r. Jaką prędkość kątową będzie miało koło?

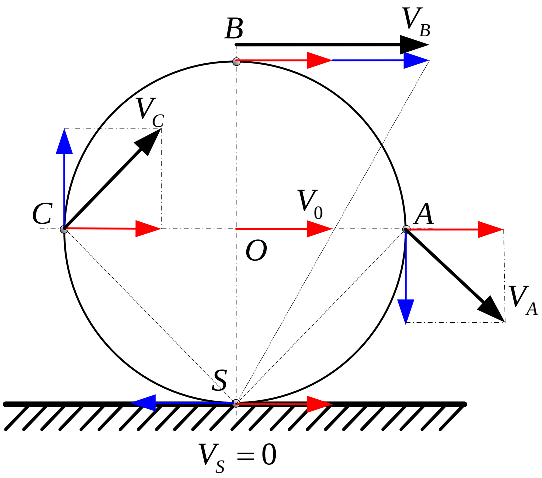
Ruch postępowy



Ruch obrotowy wokół środka krążka



Ruch płaski = Ruch postępowy + Ruch obrotowy



Wiedząc, że podczas toczenia bez poślizgu punkt styku S dla koła i jezdni musi mieć tą samą prędkość (prędkość względna równa 0). Jako, że jezdnia się nie porusza, więc punkt na kole również będzie miał prędkość Vs=0.

$$V_S = V_0 - \omega r = 0$$
$$V_0 = \omega r$$

Metoda superpozycji

Jako złożenie ruchu post. i obrotowego

$$V_A = \sqrt{V_0^2 + (\omega r)^2} = \sqrt{2} V_0$$
$$V_B = V_0 + \omega r = 2V_0$$
$$V_C = \sqrt{V_0^2 + (\omega r)^2} = \sqrt{2} V_0$$

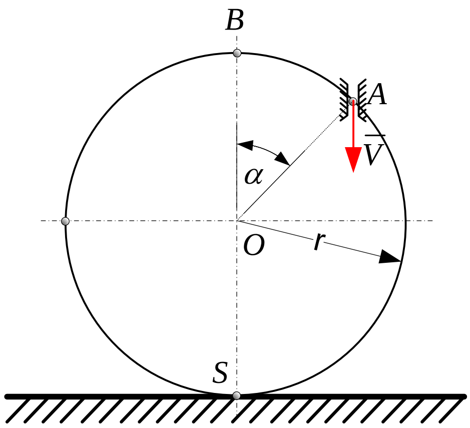
Metoda chwilowego środka obrotu

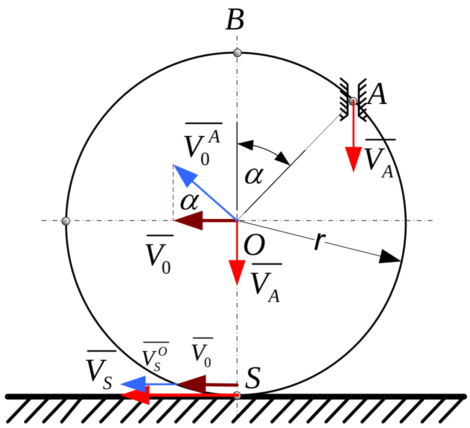
Jako ruch obrotowy względem chwilowego środ. obr.

$$V_A = \omega \left|\overline{SA}\right| = \omega \sqrt{2} r = \sqrt{2} V_0$$
$$V_A = \omega \left|\overline{SB}\right| = \omega 2r = 2V_0$$
$$V_C = \omega \left|\overline{SC}\right| = \omega \sqrt{2} r = \sqrt{2} V_0$$

Przykład 2.

Na krążek o zadanym promieniu *R* nałożono w punkcie A na jego obwodzie takie więzy, że kierunek wektora prędkości V_A jest zawsze pionowy. Zakładając, że prędkość $V_A=V$ oraz dany jest kąt α, oblicz prędkość punktu styku krążka z powierzchnią równi S, prędkość środka krążka O oraz chwilową prędkość obrotową ω.





$$\overline{V}_0 = \overline{V}_A + \overline{V}_0^A \qquad\qquad V_0^A = \omega r$$

$$x: \quad -V_0 = -V_0^A \cos(\alpha)$$

$$y: \quad 0 = V_0^A \sin(\alpha) - V_0$$

$$V_0^A = \frac{V_0}{\sin(\alpha)} \quad => \quad \omega = \frac{V_0}{r\sin(\alpha)}$$

$$V_0 = \frac{V_0}{\mathrm{tg}(\alpha)}$$

$$\overline{V}_S = \overline{V}_0 + \overline{V}_S^0 \qquad\qquad V_S^A = \omega r$$

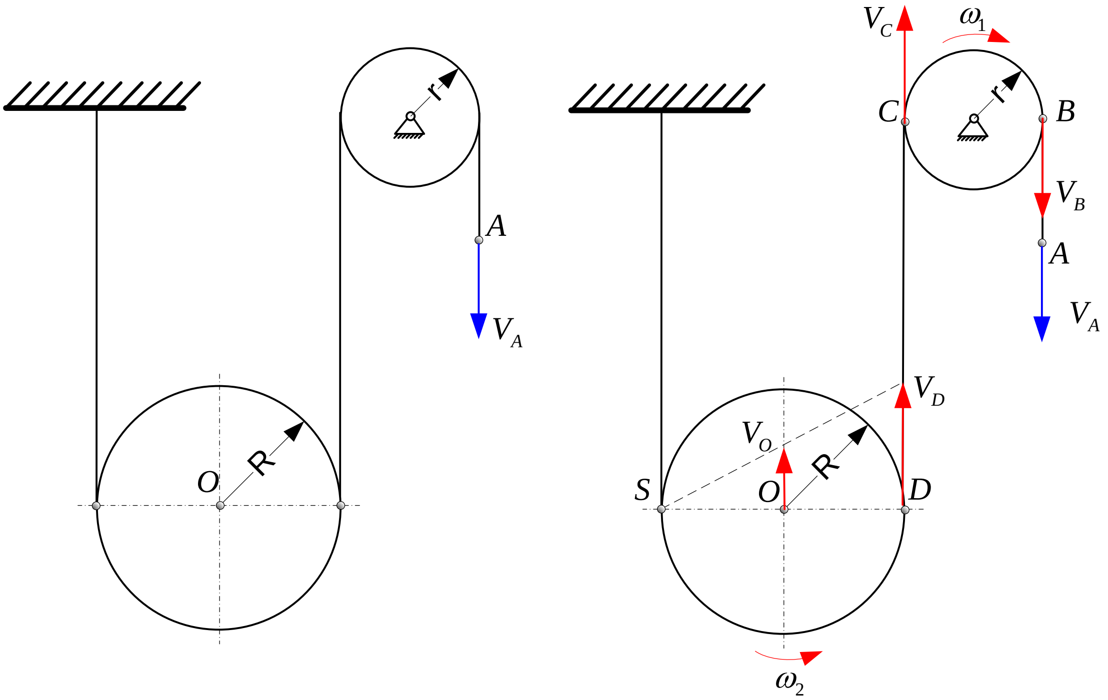
$$V_S = V_0 + V_S^0$$

$$V_S = \frac{V_0}{\mathrm{tg}\,\alpha} + \frac{V_0}{\sin\alpha} = \frac{V_0}{\sin\alpha}(1+\cos\alpha)$$

$$V_S = V_0 \frac{(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}$$

Przykład 3.

Określić ruch jakim poruszają się bryły w przedstawionym układzie i wyznaczyć ich prędkości, wiedząc że prędkość linki w punkcie A wynosi V_A.



$V_B = V_A \quad => \quad \omega_1 r = V_A$

$V_C = \omega_1 r \quad => \quad V_C = V_A$

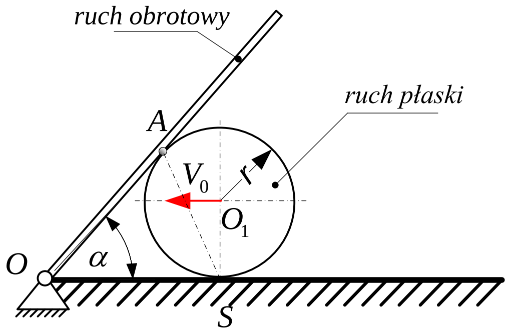
$V_D = V_C \quad => \quad V_D = V_A$

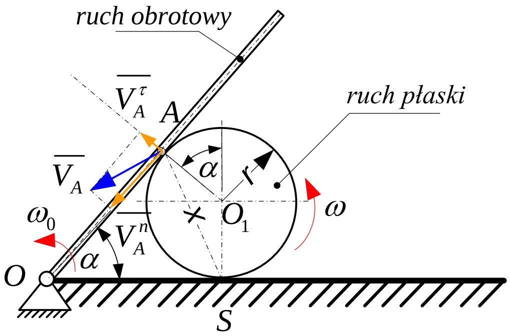
S - chwilowy środek prędkości

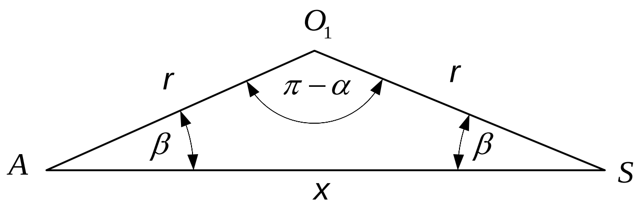
$$V_D = \omega_2 2R \quad => \quad \omega_2 = \frac{V_D}{2R}$$

$$V_O = \omega_2 R \quad => \quad V_0 = \frac{V_A}{2}$$

Przykład 4. Krążek o promieniu r toczy się bez poślizgu po równi z prędkością V_0. Wyznacz prędkość kątową pręta zamocowanego przegubowo do podłoża oraz opartego na krążku w chwili gdy pręt z równią tworzył kąt α

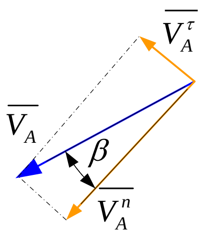






$$2\beta + \pi - \alpha = \pi$$

$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$



$$x^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos(\pi - \alpha)$$

$$x^2 = 2r^2 + 2r^2 \cos\alpha$$

$$x = \sqrt{2}r\sqrt{(1+\cos\alpha)} = \sqrt{2}r\sqrt{\left(2\cos^2(\alpha/2)\right)} = 2r\cos(\alpha/2)$$

$$V_A = \omega x = 2V_0 \cos(\alpha/2)$$

$$\omega = V_0 r$$

$$\overline{OA} = \frac{r(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}$$

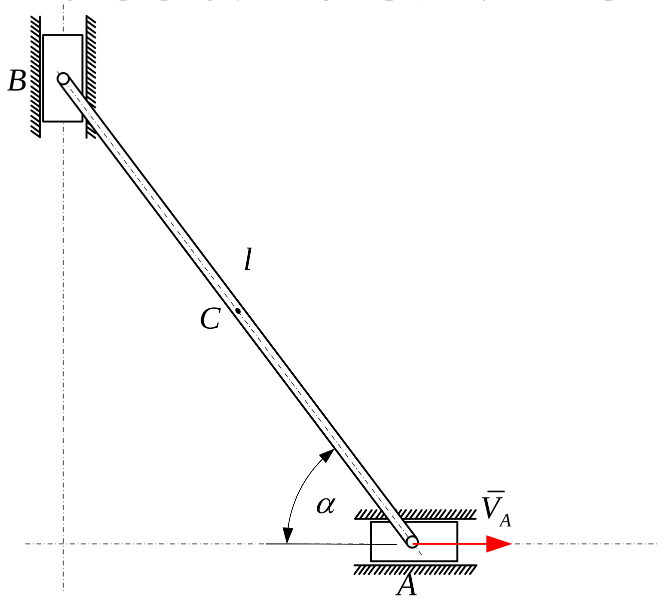
$$\overline{V_A^\tau} = V_A \sin(\beta) = V_A \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\omega_0 = \frac{V_A^\tau}{\left|\overline{OA}\right|} = \frac{V_A \sin(\alpha/2)\sin\alpha}{r(1+\cos\alpha)} = \frac{V_A \sin(\alpha/2)\sin\alpha}{2r\cos^2(\alpha/2)}$$

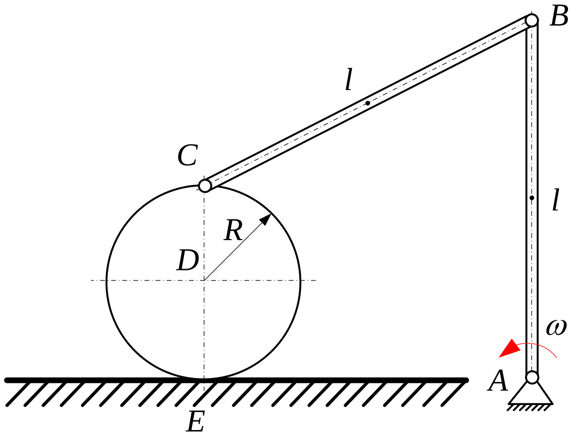
$$\omega_0 = V_A \frac{2\sin^2(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}{2r} = V_A \frac{\sin^2(\alpha/2)}{r\cos(\alpha/2)}$$

$$\omega_0 = \frac{2V_0}{r}\sin^2(\alpha/2)$$

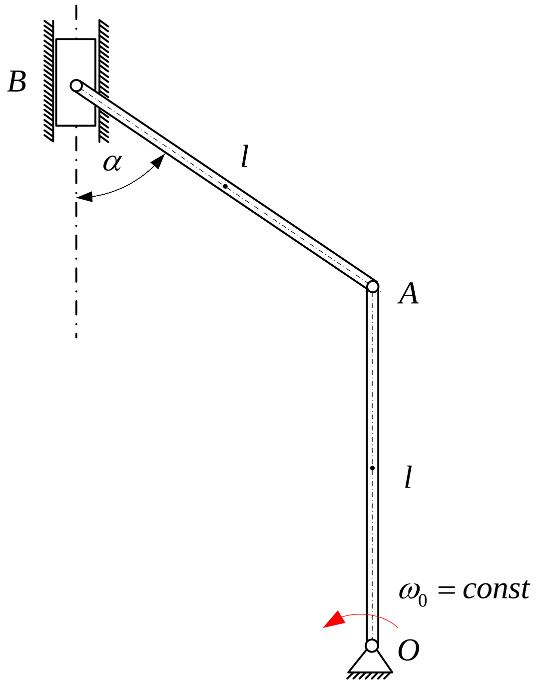
Zadanie 1. Znaleźć prędkość punktu B i C korzystając z metody chwilowego środka prędkości oraz zasady superpozycji. Długość pręta wynosi *l*, a punkt C znajduje się w jego środku ciężkości.



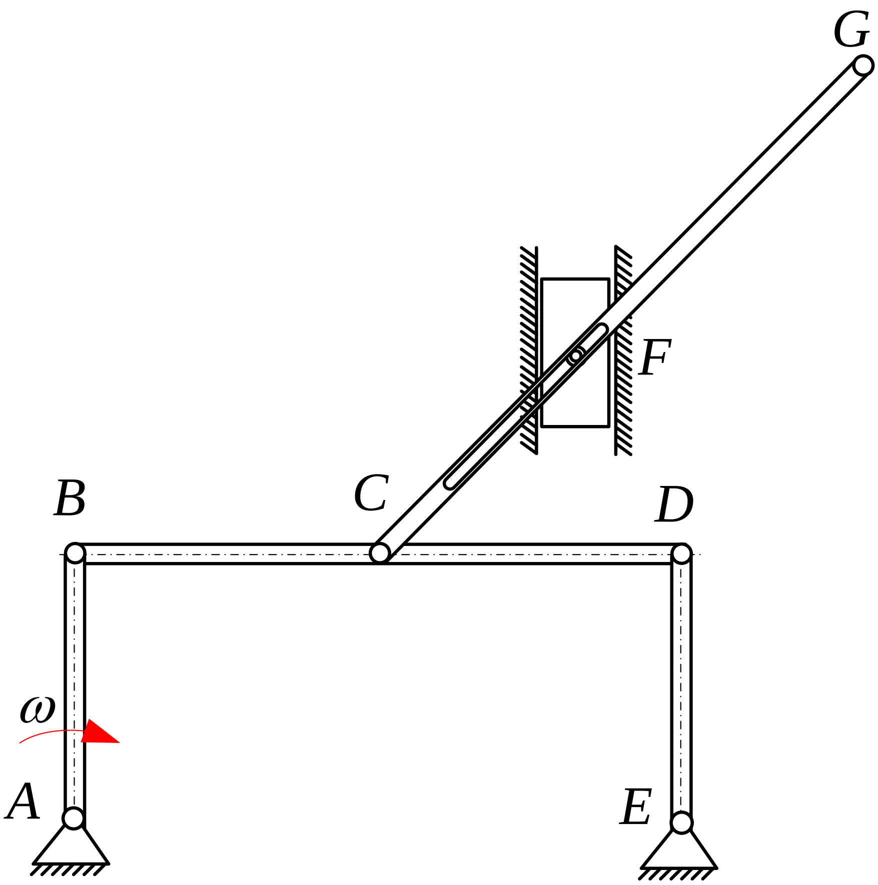
Zadanie 2. Znaleźć prędkość środka krążka (punkt D) jeżeli znana jest prędkość kątowa pręta AB. Krążek toczy się bez poślizgu.



Zadanie 3. Znaleźć prędkość punktu B w położeniu jak na rysunku, jeżeli znana jest prędkość kątowa pręta OA oraz parametry geometryczne układu.



Zadanie 4. Znaleźć prędkości punktów B,C,D,F,G oraz prędkości kątowe członów AB, BD, ED i CG w położeniu jak na rysunku. Znana jest prędkość kątowa pręta AB oraz parametry geometryczne układu. Przyjąć że: AB=ED, BC=CD.

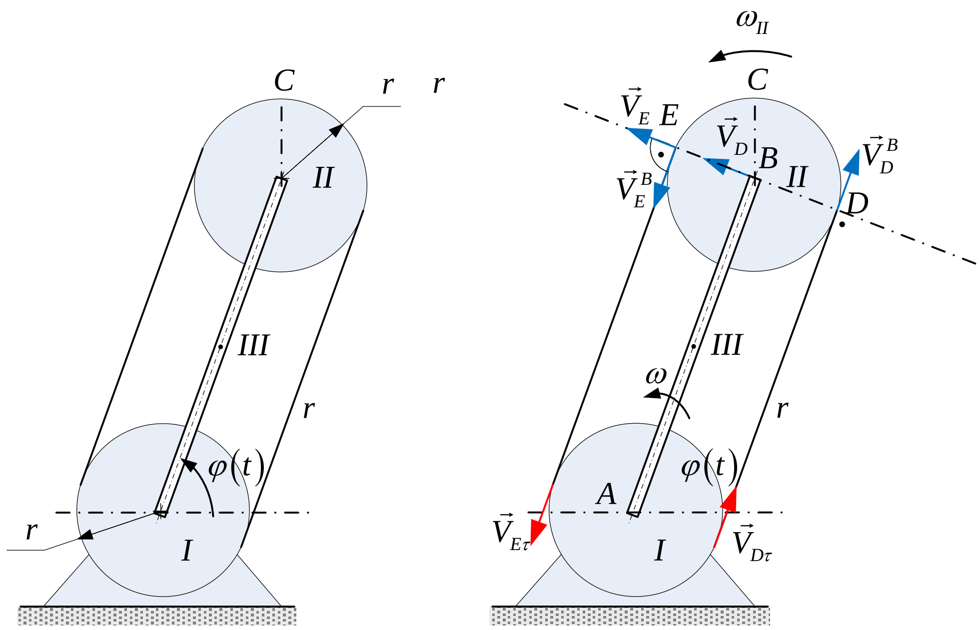


Zadanie

Udowodnić, że ciało II wykonuje ruch postępowy; wyznaczyć prędkość i przyspieszenie punktu C.

Dane:

$\varphi(t) = \omega t, \qquad \omega, r, |AB| = l$



Skoro lina jest przewleczona przez krążek I, który jest nieruchomy i nie ślizga się po nim, to oznacza, że prędkość styczna liny $V_{E\tau} = V_{D\tau} = 0$

W takim wypadku również, prędkość kątowa krążka II ω_{II} musi być równa 0 ponieważ:

$$V_E^B = V_{E\tau} = 0$$
$$V_E^B = \omega_{II} r = 0$$

$$\omega_{II} = 0$$

gdzie: V_E^B – prędkość punktu E względem punktu B (środka krążka).

Z zasady super pozycji:

$$\vec{V}_E = \vec{V}_B + \vec{V}_E^B \quad gdzie \quad \vec{V}_E^B = 0$$
$$\vec{V}_E = \vec{V}_D = \vec{V}_C = \vec{V}_B$$

Prędkość punktu B wynika z obrotu pręta AB, a więc:

$$V_B = \omega \cdot l$$

czyli

$$V_C = \omega \cdot l$$