Dynamika punktu materialnego

dr inż. Sebastian Pakuła

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

mail: spakula@agh.edu.pl
www: home.agh.edu.pl/~spakula/

Zadanie 1.

Przy wystrzale z działa pocisk opuszcza lufę z prędkością v=570m/s. Masa pocisku wynosi m=6kg. Jaki jest średni nacisk gazów prochowych, jeżeli pocisk przebywa wewnątrz działa drogę s=2m. Po jakim czasie pocisk opuści lufę działa, jeżeli się przyjmie, że nacisk gazów jest niezmienny.

Zadanie 2.

Po jakim czasie i na jakim odcinku może zatrzymać się w skutek hamowania wagon tramwajowy jadący po poziomym torze z prędkością 36km/h, jeżeli opór ruchu powstający przy hamowaniu wynosi 300kG na tonę ciężaru wagonu.

Zadanie 3.

Punkt materialny o masie m porusza się prostoliniowo pod działaniem siły zmieniającej się według wzoru $F=F_0\cos(\omega t)$, gdzie F_0 i ω są stałe. W chwili początkowej punkt ma prędkość $\dot{x}_0 = v_0$. Znaleźć równanie ruchu punktu.

$$x = \frac{F_0}{m\omega^2}\left(1-\cos\omega t\right)+v_0 t$$

Zadanie 4.

Ciało o ciężarze 2kG rzucono pionowo do góry z prędkością 20 m/s pokonuje opór powietrza, który przy prędkości v =1 m/s wynosi w kilogramach-siła 0,04; g=9,8 m/s^2. Obliczyć, po ilu sekundach ciało osiągnie najwyższe położenie.

(przeliczyć stare jednostki [kG], [T] na nowe [N])

Zadanie 5.

Motorniczy tramwajowy wyłączając stopniowo opory w obwodzie elektrycznym silnika, zwiększa jego moc tak, że siła pociągowa wzrasta od zera proporcjonalnie do czasu o 120 kG w ciągu każdej sekundy. Znaleźć równanie drogi s wagonu dla następujących danych. Ciężar wagonu 10 T, opór jazdy jest stały i wynosi 0,2T, a prędkość początkowa równa jest zeru. (1,7s) (M.690)

(przeliczyć stare jednostki [kG], [T] na nowe [N])

DRGANIA

Zadanie 1.

Aby zmierzyć lepkość cieczy Coulomb użył następującej metody. Zawiesił na sprężynie cienką płytkę A i wprawił ją w ruch drgający, najpierw w powietrzu, a potem w badanej cieczy i zmierzył w obu przypadkach okres jednego wahnięcia T_1, T_2. Siła tarcia płytki o ciecz wyrażona jest wzorem $2Sbv$, gdzie $2S$ to pole powierzchni płytki, v - jej prędkość, b - współczynnik lepkości. Pomijając tarcie płytki o powietrze, obliczyć współczynnik lepkości ze zmierzonych doświadczalnie czasów T_1 i T_2, jeżeli masa płytki wynosiła m.

$Odp.: b = \frac{2\pi m}{ST_1T_2}\sqrt{T_2^2 - T_1^2}$ Podpowiedź: $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ – okres drgań

ZADANIE 2.

Cząstka o masie m=12 g wykonuje drgania harmoniczne wzdłuż osi x, wokół położenia równowagi x=0. Maksymalna prędkość cząstki v_{max}=5cm/s, zaś maksymalne wychylenia A=23 cm. Wiedząc, że w chwili t_1=2 s wychylenie wynosiło x_1=–2 cm, obliczyć:

a) częstotliwość kołową ω, okres T i fazę początkową φ;

b) prędkość i przyśpieszenie cząstki w chwili t2=12 s;

c) maksymalną siłę działającą na cząstkę oraz jej energię całkowitą.

(patrz przykład 3)

ZADANIE 3.

Mała kulka o masie m=20 g została zawieszona na sprężynie o stałej k=10 N/cm. Kulkę odciągnięto o Δx=3 cm od położenia równowagi i puszczono nadając jej prędkość v_p=10 cm/s do góry. Obliczyć:

a) amplitudę, okres drgań tej kulki i fazę początkową;

b) maksymalną prędkość i przyśpieszenie w jej ruchu;

c) energię całkowitą kulki.

ZADANIE 4.

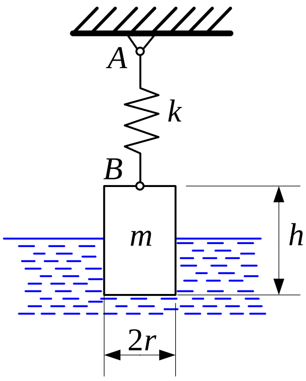
W ciągu t=12 s ciało wykonuje n=15 drgań tłumionych. W tym czasie amplituda drgań maleje m=1,2 razy. W chwili początkowej wychylenie było x_0=15 cm, zaś prędkość v_0=-10 cm/s. Obliczyć:

a) amplitudę początkową A_0 i fazę początkową α,

b) amplitudę i wychylenie w chwili czasu t_1=20 s.

Przykład 1.

Walec o promieniu r, wysokości h i masie m wisi na sprężynie AB, której koniec B jest nieruchomy. Walec zanurzony jest w wodzie. W położeniu równowagi walec zanurza się na głębokość $h/2$. W chwili początkowej walec zanurzony był w wodzie na 2/3 swojej wysokości. Następnie puszczono go bez prędkości początkowej. Przyjmując, że sztywność sprężyny ma wartość k oraz że działanie wody sprowadza się do siły wyporu wg prawa Archimedesa, wyznaczyć ruch walca względem położenia równowagi. Przyjąć, że ciężar właściwy wody równa się γ.



ROZWIĄZANIE:

Położenie równowagi:

$$0 = mg - \pi r^2 \gamma \frac{h}{2} - k\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{mg - \pi r^2 \gamma \frac{h}{2}}{k}$$

Równanie ruchu:

$$m\ddot{x} = mg - k\left(x + \Delta x\right) - \pi r^2 \gamma \left(\frac{h}{2} + x\right)$$

$$m\ddot{x} = mg - kx - mg + \pi r^2 \gamma \frac{h}{2} - \pi r^2 \gamma \frac{h}{2} - \pi r^2 \gamma x$$

$$m\ddot{x} = -kx - \pi r^2 \gamma x$$

$$\ddot{x} + \frac{kx + \pi r^2 \gamma}{m} x = 0$$

$\ddot{x}+\omega_0^2 x=0$ gdzie $\omega_0=\sqrt{\frac{kx+\pi r^2\gamma}{m}}$ – częstość drgań własnych układu

CORJ: (Całka ogólna równania jednorodnego)

$x=A\sin\omega_0 t+B\cos\omega_0 t$

$\dot{x}=A\omega_0\cos\omega_0 t-B\omega_0\sin\omega_0 t$

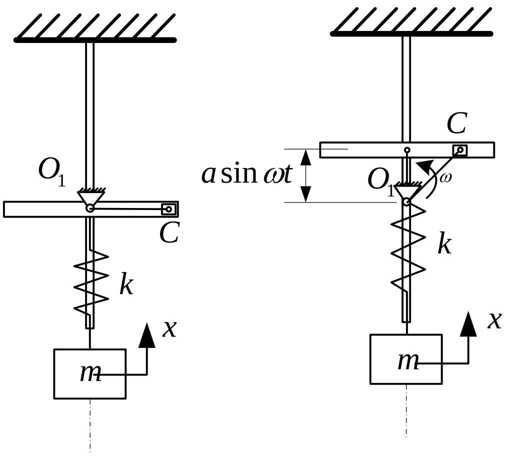
Warunki początkowe $x(0)=\frac{3}{2}h-\frac{1}{2}h=\frac{1}{6}h$, $\dot{x}(0)=0$

$A=0$, $B=\frac{1}{6}h$

$x(t)=\frac{1}{6}h\cos\frac{k+\pi r^2\gamma}{m}t$

Przykład 2.

Odważnik o masie M wisi na sprężynie AB, której góry koniec wykonuje drgania harmoniczne o amplitudzie a i częstości kołowej ω wzdłuż prostej pionowej. Odległość $O_1C=a\sin\omega t$. Wyznacz równanie ruchu odważnika przy następujących danych. $m=10kg$. Siła 100N rozciąga sprężynę o 10cm. $a=2cm$, $\omega=7s^{-1}$. Załóżmy, że w momencie uruchomienia urządzenia, układ znajdował się w położeniu równowagi.



ROZWIĄZANIE:

Obliczanie współczynnika sprężystości k:

$$k = \frac{P}{\Delta x} = \frac{100}{0,1} = 1000\frac{N}{m}$$

Równanie różniczkowe ruchu:

$$m\ddot{x} = k(a\sin\omega t - x) \quad /:m$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 a \sin\omega t$$

gdzie $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (częstość drgań własnych układu)

CORJ: (Całka ogólna równania jednorodnego)

RJ: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$$x_j = A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t$$

$$\dot{x}_j = A\omega_0\cos\omega_0 t - B\omega_0\sin\omega_0 t$$

$$\ddot{x}_j = -A\omega_0^2\sin\omega_0 t - B\omega_0^2\cos\omega_0 t$$

Zakładając warunki początkowe $x(0)=0$, $v(0)=0$

$$A = 0, B = 0$$

CSRN: (Całka szczególna równania niejednorodnego)

$x_s = C\sin\omega t + D\cos\omega t$, $\dot{x}_s = C\omega\cos\omega t - D\omega\sin\omega t$, $\ddot{x}_s = -C\omega^2\sin\omega t - D\omega^2\cos\omega t$

Podstawiamy przewidywane rozwiązania szczególne do RJ.

$$-C\omega^2\sin\omega t - D\omega^2\cos\omega t + C\omega_0^2\sin\omega t + D\omega_0^2\cos\omega t = \omega_0^2 a\sin\omega$$

Przyrównujemy współczynniki występujące przy *sin*ωt i *cos*ωt

$$\begin{cases} C\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) = \omega_0^2 a \\ D\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = \dfrac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ D = 0 \end{cases}$$

CSRN: $x_s = \frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\omega t$

CORN=CORJ+CSRN (Całka ogólna równania niejednorodnego)

$$x = \frac{a\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\omega t$$

$x = 3{,}92\sin(7t)\,cm$

Przykład 3.

Cząstka o masie *m*=4g wykonuje drgania harmoniczne wzdłuż osi x, wokół położenia równowagi *x*=0. Wychylenie cząstki w chwili t_1=2s wynosi x_1=−4.3579 cm, zaś w chwili t_2=5s wychylenie wynosi x_2=−3.4994 cm. Wiedząc, że amplituda drgań *A*=5cm,

obliczyć:

a) częstotliwość kołową *ω*, okres *T* i fazę początkową *φ*;

b) wychylenie i prędkość cząstki w chwili t= 15 s;

c) energię kinetyczną i potencjalną w chwili t=15 s.

ROZWIĄZANIE:

A)

Ogólne równanie ruchu harmonicznego ma postać:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{1}$$

$$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi) \tag{2}$$

w takim wypadku podstawmy do tego równania dwa rozwiązania:

$$\begin{cases} x_1 = 5\sin(\omega 2 + \varphi) \\ x_2 = 5\sin(\omega 5 + \varphi) \end{cases}$$

Otrzymaliśmy układ dwóch równań o dwóch niewiadomych *ω* i *φ*. Podzielmy oba równania przez 5 i posługując się funkcją odwrotną do sinus tj. *asin*. Obliczymy w ten sposób wartość argumentu funkcji sinus.

$$\begin{cases} a\sin\left(\frac{x_1}{5}\right) = \omega 2 + \varphi \\ a\sin\left(\frac{x_2}{5}\right) = \omega 5 + \varphi \end{cases} \tag{3}$$

Odejmijmy od drugiego równania pierwsze, aby wyrugować *φ*. Otrzymujemy:

$$a\sin\left(\frac{x_2}{5}\right) - a\sin\left(\frac{x_1}{5}\right) = 3\omega$$

stąd:

$$\omega = \frac{1}{3}\left[a\sin\left(\frac{x_2}{5}\right) - a\sin\left(\frac{x_1}{5}\right)\right] = \frac{1}{3}\left[a\sin\left(\frac{-4,3579}{5}\right) - a\sin\left(\frac{-3,4994}{5}\right)\right] = 0,09439549\,\frac{rad}{s}$$

Aby obliczyć kąt fazowy φ, wykorzystamy jedno z równań z układu (3).

$$\varphi = a\sin\left(\frac{x_1}{5}\right) - 2\cdot\omega = -1,2472\,rad$$

Okres drgań policzymy na podstawie znanej częstości kołowej ω wg. wzoru:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 66,56s \qquad (4)$$

в)

Mając już znane równanie ruchu (1) oraz prędkości (2) wyznaczymy wychylenie i prędkość w 15 sekundzie ruchu.

$$x(15) = 5\cdot\sin\left(0,09439549\cdot 15 - 1,2472\right) = 0.83966418cm$$

$$v(15) = 5\cdot 0,09439549\cdot\cos\left(0,09439549\cdot 15 - 1,2472\right) = 0.4652746334\,\frac{cm}{s}$$

c)

Energia kinetyczna i potencjalna wyrażone są odpowiednio wzorami:

$$E = \frac{mv(15)^2}{2} = \frac{0,004\cdot kg\cdot 0,00462746334^2\,\frac{m^2}{s^2}}{2} = 4,3296\cdot 10^{-8}\,J = 43,96\,nJ$$

$$U = \frac{kx(15)^2}{2}$$

gdzie współczynnik k to stała sprężystości. Można ją obliczyć znając częstość drgań własnych ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$k = m\omega^2$$

Energia potencjalna będzie wyrażona wzorem:

$$U = \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{= 0.004kg\cdot 0.09439549^2\,\frac{rad^2}{s^2}\cdot 0,0083966418^2\,m^2}{2} = 1,256nJ$$

Sprawdźmy jeszcze jednostki:

$E \quad -> \quad kg \cdot m^2 / s^2 = kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m = N \cdot m = J$

$U \quad -> \quad kg \cdot \frac{rad^2}{s^2} m^2 = kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m = N \cdot m = J$

Policzmy jeszcze energię całkowitą:

$E_C = E + U = 43,96nJ + 1,256nJ = 45,216nJ$

ZADANIE! OBLICZ ENERGIE CAŁKOWITĄ W 10 SEKUNDZIE RUCHU I PORÓWNAJ Z CAŁKOWITĄ ENERGIĄ W 15 SEKUNDZIE RUCHU!