

Wprowadzenie: Dynamika

dr inż. Sebastian Pakuła

*Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Mechaniki i Wibroakustyki*

mail: spakula@agh.edu.pl

www: home.agh.edu.pl/~spakula/

Mechanika 2

Zasady ogólne:

- Ocean końcowa O – ocean średnia z:
KR – śr. z kartkówek;
A – śr. z aktywności;
K1 – ocena z kolokwium pierwszego;
K2 – ocena z kolokwium drugiego
Ocena liczona np. wg wzoru: $O = \frac{KR + A + K1 + K2}{4}$
- Przez aktywność rozumie się: zgłaszanie na zajęciach, odpowiedź przy tablicy, rozwiązywanie prac domowych
- Warunkiem zaliczenia jest pozytywne zaliczenie kolokwium K1 i K2, zaliczenie **kontrolnego zestawu zadań** oraz obecność na co najmniej 60% zajęć
- Ostateczna ocena może być wyższa od wynikającej z O , jeżeli student wykaże się dodatkową aktywnością naukową (nieobowiązkowe prace domowe itp.)

Obecność:

- Obecność jest obowiązkowa
- Przysługuje prawo do 2 nieobecności nieusprawiedliwionych w ciągu semestru
- Obecność na wszystkich zajęciach może być premiovana
- Nieobecność należy natychmiast usprawiedliwić po dobytej chorobie – usprawiedliwienia w późniejszych terminach nie będą rozpatrywane

Poprawa kolokwium:

- Przysługują dwa terminy poprawkowe kolokwium zaliczeniowych
- Na poprawie obowiązuje materiał z całego semestru
- Kartkówki nie podlegają poprawie
- Z prawa do poprawy mogą korzystać tylko osoby z zaliczonym kontrolnym zestawem zadań oraz uregulowanymi nieobecnościami

Kontrolny zestaw zadań:

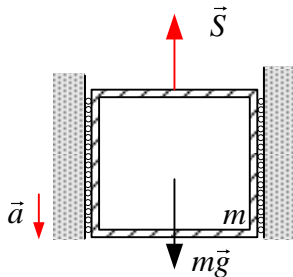
- Każda z osób jest zobligowana do rozwiązania kontrolnego zestawu zadań, który dostępny jest na stronie home.agh.edu.pl/~spakula/ w zakładce *Mechanika II*
- Zadania są sparametryzowane i każda osoba otrzymuje indywidualny parametr podany przez prowadzącego
- Zadania można oddawać na bieżąco przed rozpoczęciem zajęć lub w godzinach konsultacji
- Zadania rozwiązane błędnie, zostaną zwrócone

Przykład zadania z dynamiki (na rozgrzewkę ☺):

Winda o masie 280kg opuszcza się w szybie ruchem jednostajnie przyspieszonym i przebywa w początkowych 10s drogę 35m. Wyznacz napięcie liny, na której wisi winda.

Rozwiązanie:

Budujemy model fizyczny (schemat, rysunki, siły)



Punktem wyjścia większości zadań z dynamiki jest druga zasada dynamiki newtona $m\vec{a} = \sum \vec{P}_i$

Równanie ruchu:

$$m\vec{a} = \vec{S} + m\vec{g} \quad \text{– wektorowe równanie ruchu}$$

Winda porusza się ruchem prostoliniowym, więc zapiszemy równanie ruchu skalarnie:

$$ma = mg - S \quad \text{– skalarnie równanie ruchu (jaka jest różnica?)}$$

otrzymaliśmy równanie ruchu, z którego możemy obliczyć przyspieszenie a .

$$a = g - \frac{S}{m}$$

chcąc uzyskać równanie drogi, należy powyższe równanie podwójnie scałkować po czasie. Po pierwszym całkowaniu przyspieszenia otrzymamy równanie prędkości w funkcji czasu $v(t)$.

$$v = \int a dt + C = \int g - \frac{S}{m} dt + C$$

$$v = gt - \frac{S}{m}t + C$$

Po jednokrotnym całkowaniu przyspieszenia otrzymaliśmy równanie prędkości ze stałą całkowania C . Całkowania dokonaliśmy przy założeniu, że siła napięcia linki S jest stała (niezmienna w czasie). Stałą C obliczymy z warunków początkowych. Jeśli w treści zadania, nie ma informacji na temat prędkości w chwili początkowej przyjmuje się ją jako zero. Dla uogólnienia przypadków założymy, że prędkość początkowa (czyli w chwili $t=0$) wynosi v_0 . Często zapisujemy to w postaci $v(0)=v_0$. Podstawmy do równania prędkości $v=v_0$, a za czas $t=0$.

$$v_0 = g \cdot 0 - \frac{S}{m} \cdot 0 + C$$

$$C = v_0$$

Równanie prędkości wygląda więc następująco:

$$v = gt - \frac{S}{m}t + v_0$$

Dokonajmy teraz kolejnego całkowania. Otrzymamy równanie drogi.

$$x(t) = \int v dt + D = \int \left(gt - \frac{S}{m}t + v_0 \right) dt + D$$

$$x(t) = \frac{gt^2}{2} - \frac{S}{2m}t^2 + v_0t + D$$

Podobnie jak w poprzednim wypadku, stałą całkowania D obliczymy z warunków początkowych. Tylko jakie jest początkowe położenie windy $x(0)=?$. Jeśli w treści zadania nie podano tego wprost, pozostawia nam to dowolność. Położenie początkowe zależy od miejsca przyjęcia początku układu współrzędnych. Dla wygody założmy, że środek układu współrzędnych znajduje się w środku masy windy w chwili początkowej. W takim wypadku $x(0)=0$. Podstawmy $x=0$, i $t=0$ do powyższego równania.

$$0 = \frac{g0^2}{2} - \frac{S}{2m}0^2 + v_00 + D$$

$$D = 0$$

Ostatecznie równanie ruchu wynosi:

$$x(t) = \frac{gt^2}{2} - \frac{S}{2m}t^2 + v_0t$$

$$x(t) = v_0t + \frac{1}{2} \left(g - \frac{S}{m} \right) t^2$$

Zauważmy, że odpowiada ono równaniu drogi w ruchu jednostajnie przyspieszonym

$$x = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2} \quad \text{gdzie } x_0=0.$$

Tak dzieje się tylko w przypadku gdy siła napięcia linki jest stała. Gdyby siła S zmieniała się w czasie, należałoby odpowiednio scałkować równanie siły S .

Wróćmy do zadania. Mając równanie drogi podstawmy dane jakie mamy, a więc wiemy, że $x(10)=35\text{m}$. (czyt. droga w dziesiątej sekundzie wynosiła 35m). Podstawmy te wielkości do równania drogi, oczywiście przyjmując, że $v_0=0$.

$$35 = \frac{1}{2} \left(g - \frac{S}{m} \right) 10^2$$

$$0,7 = g - \frac{S}{m}$$

$$S = gm - 0,7m$$

$$S = 9,81m - 0,7m = 9,11m = 9,11 \cdot 280$$

$$S = 2550,8$$

Obliczenia powyższe doprowadziły nas do odpowiedzi na pytanie, jaka jest siła naciągu liny podtrzymującej windę. Rodzi się pytanie: w jakich jednostkach jest wyrażona ta siła? Skoro wszystkie wielkości podczas obliczeń, miały wymiar jednostek z podstawowego układu jednostek miar SI, to spodziewamy się, że wynik też wyjdzie w jednostkach podstawowych. Więc siła powinna mieć wymiar [N] – newton.

$$N = kg \cdot \frac{m}{s^2}$$

Do sprawdzenia przeanalizujemy jedno z równań, które powstawały podczas przekształceń:

$$S = gm - 0,7m$$

Symbole g – oznacza przyspieszenie ziemskie wyrażone w m/s^2 ; m – masa wyrażona w kg. Więc zgadza się. Pytanie czy 0,7 jest wyrażone w m/s^2 – tak jakbyśmy oczekiwali? Sprawdźmy! 0,7 powstało przez pomnożenie 35m przez 2 i podzielenie przez $(10s)^2$ otrzymamy:

$$\frac{35m \cdot 2}{10^2 s^2} = \frac{70}{100} \frac{m}{s^2} = 0,7 \frac{m}{s^2}$$

Więc jednostki się zgadzają. To jedna z najprostszych i najefektywniejszych metod autokorekty w zadaniach. Sprawdzanie jednostek!

Odp.: $S \cong 2551N$ co odpowiada ciężarowi $S = \frac{2551}{9,81} kG = 260kG$ (kG - kilogram-siła).

Pytanie – zagadka! Czym się różni masa 260kg od ciężaru 260kG?

Zadania z kinematyki (powtórka)

Zadanie 1.

Ciążarówka przemieszcza się po prostej drodze z prędkością 20km/h, następnie przyspiesza do 120km/h w ciągu 15s. Jeżeli przyspieszenie jest stałe, oblicz drogę jaką przebyła ciężarówka w czasie rozpędzania.

Zadanie 2.

Z wieży o wysokości $h=12,5\text{m}$ rzucono pionowo w dół piłkę nadając jej początkową prędkość $v_0=4,5\text{m/s}$. Oblicz prędkość piłki w momencie uderzenia o ziemię.

Zadanie 3.

Samochód przemieszcza się z prędkością 70km/h z przyspieszeniem 6000km/h^2 wzdłuż prostej drogi. Jak długo zajmie osiągnięcie prędkości 120km/h oraz jaki dystans przebędzie w tym czasie?

Zadanie 4.

Pociąg przemieszcza się z prędkością wg równania $v=20(1-e^{-t})$ m/s, gdzie t to czas wyrażony w sekundach. Oblicz odległość przebytą przez pociąg w ciągu trzech sekund i przyspieszenie jakie miał w tym czasie.

Zadanie 5.

Cząstka rozpoczyna ruch w linii prostej pod wpływem przyspieszenia $a=(2t-6)$ m/s², gdzie t jest czasem w sekundach. Jaka jest prędkość cząstki w czasie $t=6\text{s}$ i jakie jest jej położenie w chwili $t=11\text{s}$?

Zadanie 6.

Cząstka początkowo znajduje się w środku układu współrzędnych i porusza się wzdłuż linii prostej przez ciecz, w której prędkość cząstki zdefiniowana jest przez równanie $v=1,8(1-e^{-0,3t})$ m/s, gdzie t jest wyrażone w sekundach. Oblicz przemieszczenie cząstki w ciągu pierwszych 3 sekund.

Zadanie 7.

Kamień spada do szybu bez prędkości początkowej. Dźwięk wywołany uderzeniem kamienia o dno został usłyszany po 6,5s. od początku ruchu. Prędkość dźwięku wynosi 340m/s. Znaleźć głębokość szybu.