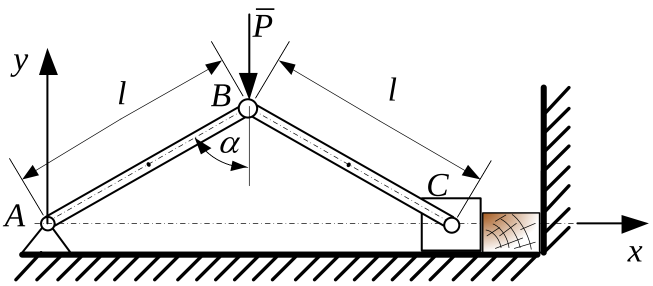
Mechanika Analityczna i Drgania
Zasada prac przygotowanych

dr inż. **Sebastian Pakuła**

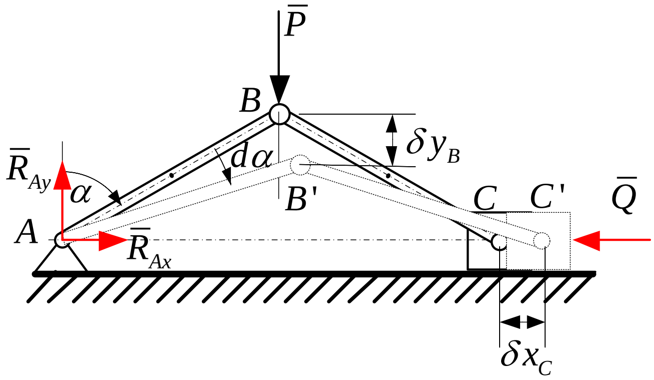
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

mail: spakula@agh.edu.pl

1. Wyznacz siłę Q wywieraną na drewniany blok przez siłę P za pomocą mechanizmu imadła przedstawionego na rysunku.



Rozwiązanie:



$$x_C = 2l\sin\alpha \qquad y_B = l\cos\alpha$$

$$\delta x_C = 2l\cos\alpha\cdot\delta\alpha \qquad \delta y_B = -l\sin\alpha\cdot\delta\alpha$$

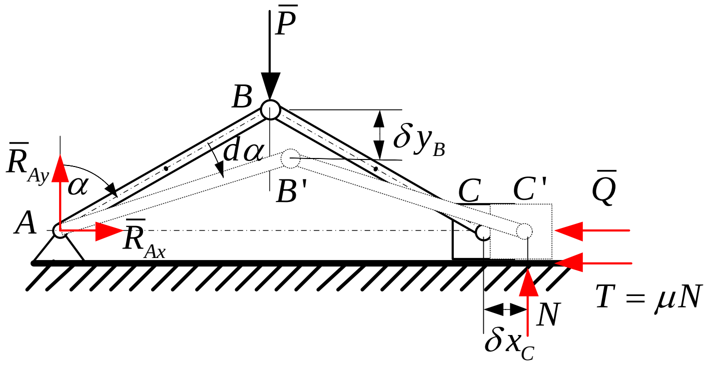
Zasada prac przygotowanych:

$$\delta W = -P\cdot\delta y_B - Q\cdot\delta x_C = 0$$

$$\left(Pl\sin\alpha - 2Ql\cos\alpha\right)\cdot\delta\alpha = 0$$

$$Q = \frac{1}{2}P\cdot\operatorname{tg}\alpha$$

Jeśli założymy tarcie bloku C o podłoże, wówczas:



Siłę nacisku można policzyć z równania momentu względem przegubu A lub z symetrii układu:

$$N = \frac{P}{2} \qquad T = \frac{1}{2}\mu P$$

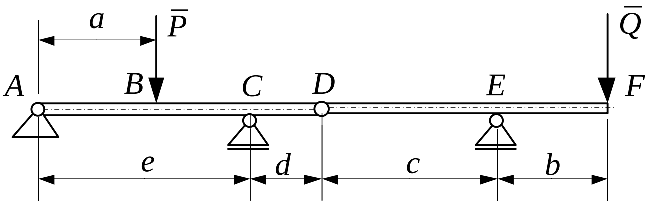
Zasada prac przygotowanych:

$$\delta W = -P\cdot\delta y_B - \left(Q+T\right)\cdot\delta x_C = 0$$

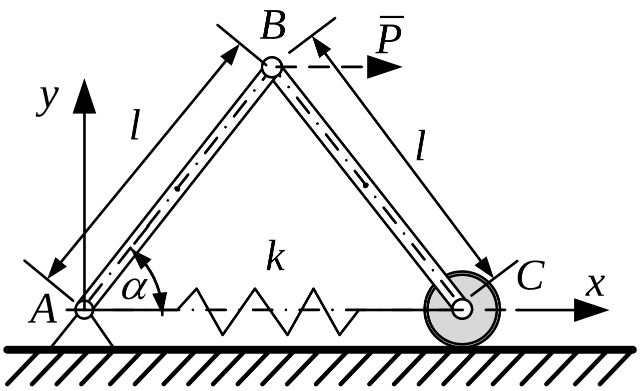
$$\left(Pl\sin\alpha - 2Ql\cos\alpha - \mu Pl\cos\alpha\right)\cdot\delta\alpha = 0$$

$$Q = \frac{1}{2}P\cdot\left(\operatorname{tg}\alpha - \mu\right)$$

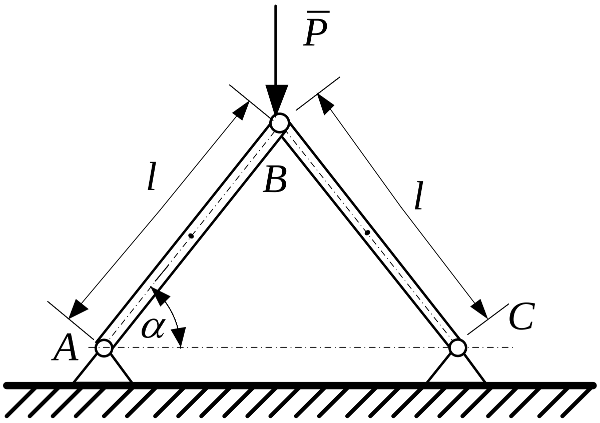
2. Wyznacz siły reakcji podpór belki obciążonej jak na rysunku stosując zasadę prac przygotowanych.



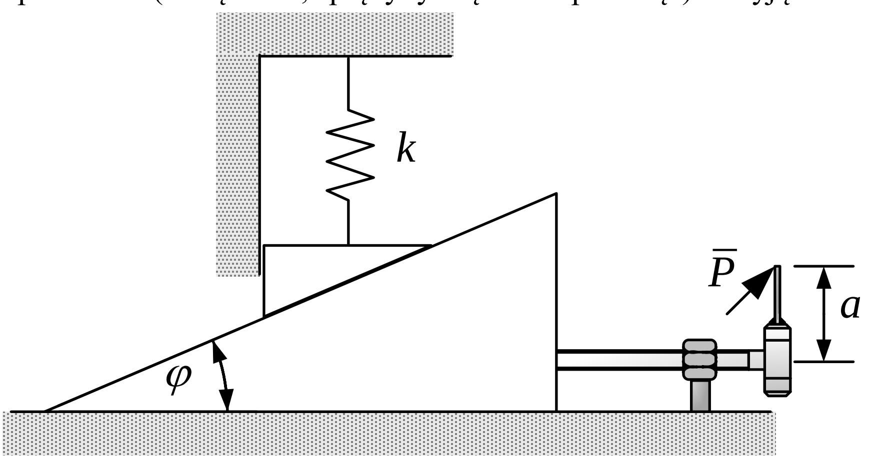
3. Układ przed przyłożeniem siły P do przegubu w punkcie B zajmuje położenie równowagi jak na rysunku, a sprężyna o sztywności *k* nie jest odkształcona. W wyniku przyłożenia siły, ramiona ugną się i układ znajdzie nowe położenie równowagi. Wyznacz nowe położenie równowagi podając kąt β, jaki tworzą ramiona układu z podłożem. Dane: P, l, k, α



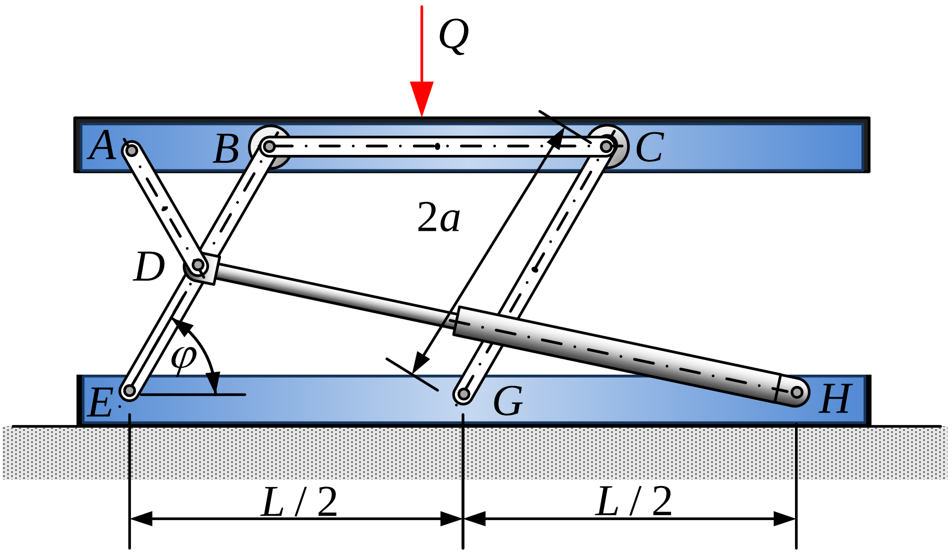
4. Oblicz reakcje w przegubach A i C.



5. Dana jest prasa klinowa jak na rysunku. Wyznaczyć siłę S w ściskanej sprężynie w przypadku, gdy siła P=1kN przyłożona jest do końca rękojeści o długości a=0,6m prostopadle do osi śruby i rękojeści. Skok śruby wynosi *h*=12 mm. Kąt przy wierzchołku klina wynosi φ=30°. Rozpatrzeć dwa warianty: a) bez tarcia, b) z uwzględnieniem tarcia pomiędzy klinem, a podłożem (masę klina, sprężyny i łącznika pominąć). Przyjąć do obliczeń μ=0.3.



6. Podnośnik hydrauliczny służy do podnoszenia jedno tonowych skrzyń. Składa się z platformy oraz dwóch identycznych systemów dźwigowych, na który oddziałują dwa hydrauliczne siłowniki. (Tylko jeden siłownik jest widoczny). Człony EDB i CG mają długość *2a*, a człon AD jest przymocowany w środku EDB. Określ siłę wywieraną przez poszczególne siłowniki gdy podnoszą skrzynię o ciężarze 1 tony. φ=60 °, *a*= 0,70 m oraz *L*=3,2 m.

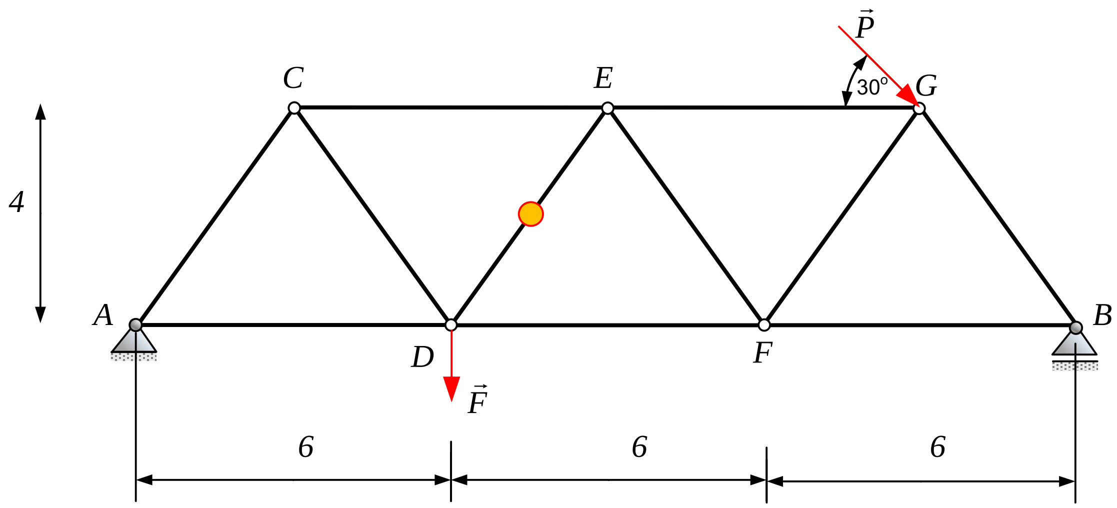


Wyznaczanie wartości sił wewnętrznych w prętach kratownicy za pomocą zasady prac przygotowanych (wirtualnych)

Przykład.

Wyznacz siłę reakcji wskazanego pręta w kratownicy stosując zasadę prac przygotowanych (ZPP).

Dane: $P = 20kN, F = 10kN$



Wstęp:

Główną zaletą stosowania ZPP jest brak konieczności wyznaczania wartości sił reakcji więzów kratownicy. Nie ma potrzeby wyznaczania reakcji w przegubie *A* i podporze *B*.

Należy zwrócić uwagę, że przedstawiona kratownica jest statycznie wewnętrznie wyznaczalna. Oznacza to, że kratownica posiada 0 stopni swobody i nie złoży się pod wpływem oddziaływania sił zewnętrznych. Statyczną wyznaczalność kratownicy można obliczyć posługując się wzorem:

$$s = 2w - l - 3$$

gdzie: s – liczba stopni swobody; w – liczba węzłów; l – liczba prętów.

Trójka we wzorze oznacza liczbę niewiadomych związanych z reakcjami więzów. Zwykle w płaskich układach kratownicowych liczba ta wynosi 3.

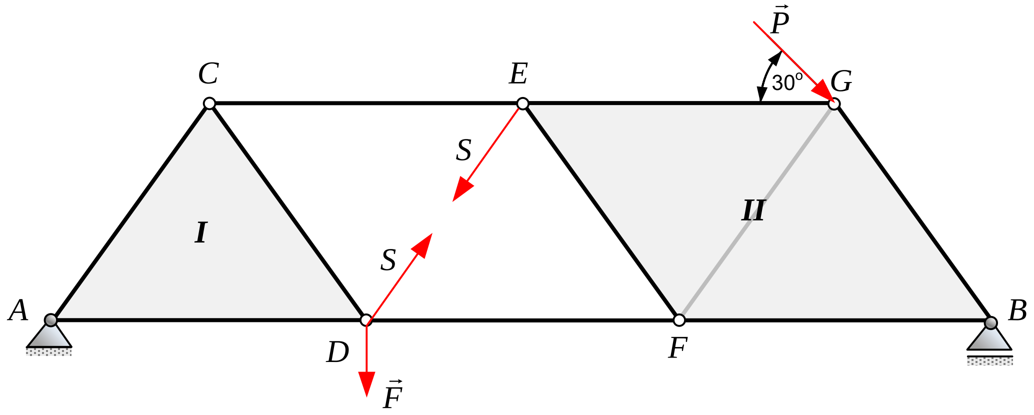
Obliczmy stopnie swobody kratownicy:

$$s = 2 \cdot 7 - 11 - 3 = 0$$

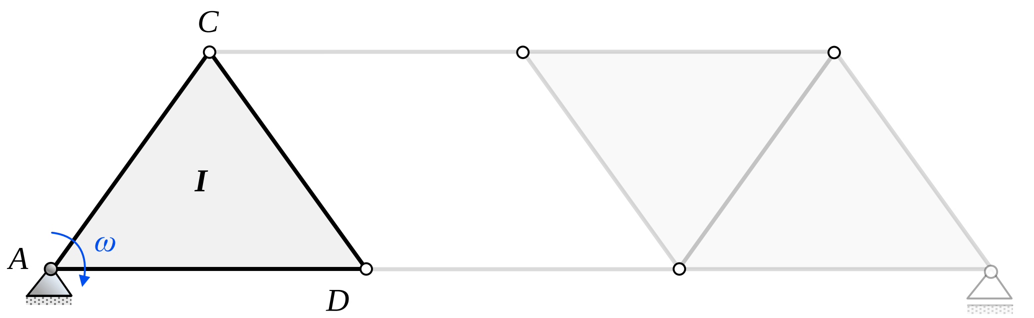
Tak jak oczekiwaliśmy liczba stopni swobody wynosi 0.

Rozwiązanie:

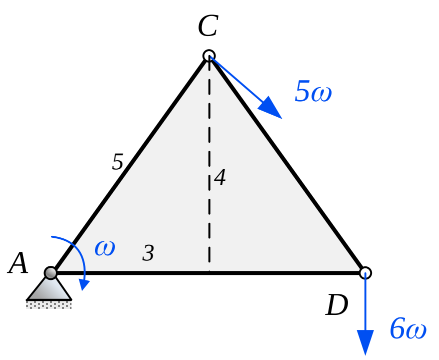
W pierwszym etapie pozbywamy się pręta, którego wartość reakcji chcemy policzyć i zastępujemy go parą sił tak jak na rysunku. W rezultacie, kratownica staje się mechanizmem o ruchliwości 1 (1 stopień swobody) i dzieli się w tym wypadku na dwie bryły sztywne nazywane często tarczami (I i II). Tarczy są połączone prętami CE i DF.



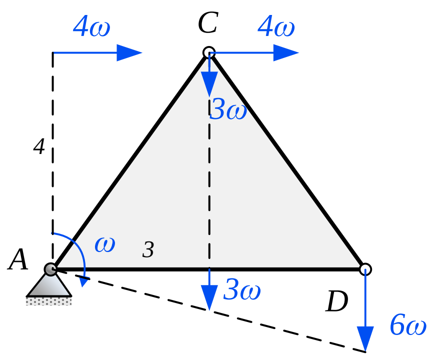
Skoro mechanizm ma jeden stopień swobody, tak więc jego ruch będzie zależał tylko od jednej współrzędnej. Wymuśmy zatem ruch tego mechanizmu, nadając prędkość kątową tarczy I.



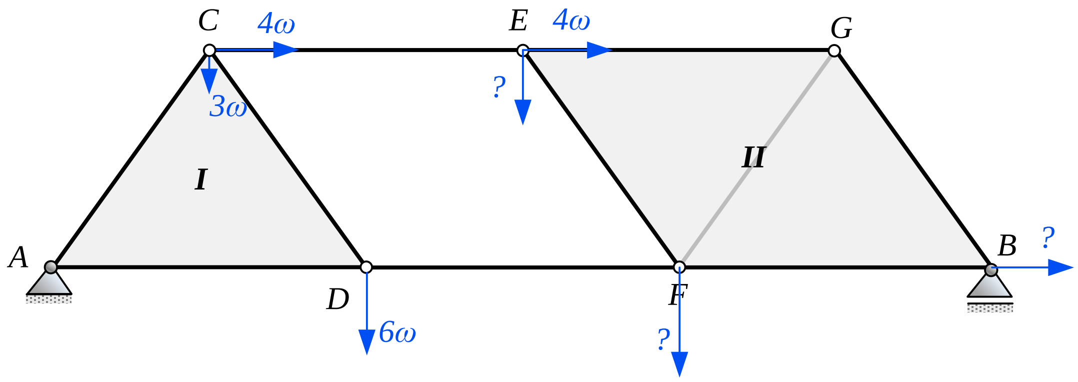
Tarcza porusza się ruchem obrotowym względem przegubu *A*. Prędkość każdego z punktów tarczy, będzie wynika z prędkości obrotowej tarczy.



W większości przypadków bardziej będą potrzebne składowe prędkości punktów bryły niż bezwzględne wartości prędkości. Dlatego lepiej przedstawić prędkość punktu *C* za pomocą składowych. Poza tym zwykle łatwiej jest wyznaczyć składowe prędkości niż wartość bezwzględną. W tym wypadku ramię AC ma długość 5*m*, bowiem z geometrii otrzymaliśmy trójkąt pitagorejski. Składowe prędkości punktu C obliczamy w następujący sposób:

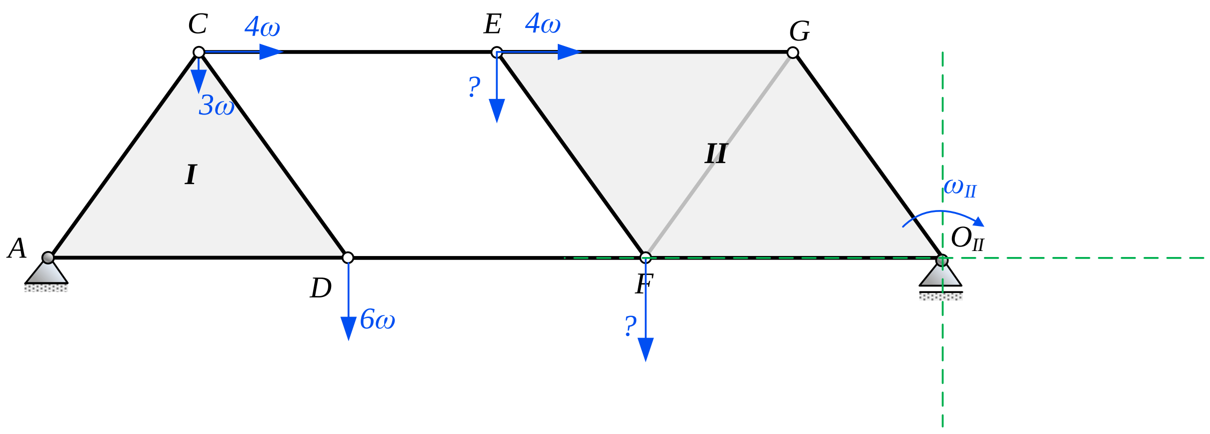


Mamy obliczone prędkości wszystkich punktów tarczy I, zajmijmy się kolejnymi elementami kratownicy. Zwróćmy uwagę, że tarcza B porusza się ruchem płaskim! Nie możemy w nim wyróżnić środka obrotu. Wartości prędkości punktów obliczymy posługując się **metodą chwilowego środka prędkości**.



W pierwszej kolejności należy zająć się więzami kratownicy. Podpora przesuwna B unieruchamia nam ruch punktu B w kierunku pionowym. Zatem jedyny możliwy ruch może odbywać się w kierunku poziomym. Nie wiemy na razie jaką ma wartość ani zwrot.

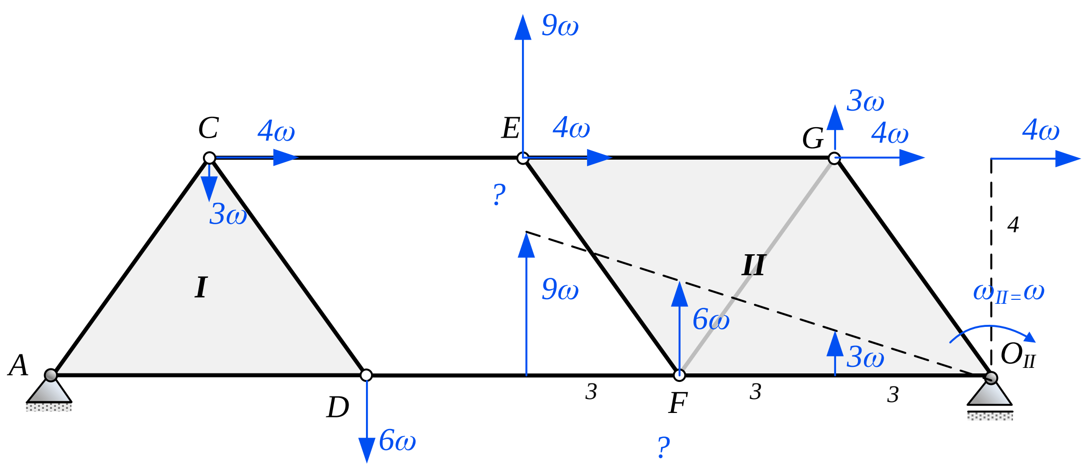
Cecha charakterystyczną prętów (również brył sztywnych) jest to, że nie mogą się wydłużać ani skracać (zaniedbując małe odkształcenia sprężyste). W związku z tym składowe prędkości obydwu końców pręta wzdłuż osi tego pręta musza być sobie równe (**metoda rzutowania wektorów prędkości bryły sztywnej**). Z tego wynika, że pozioma składowa prędkości punktu E będzie taka sama jak punktu C. To samo dotyczy składowej poziomej prędkości F i D (której nie ma). Z dotychczasowej analizy wynika, że znamy kierunki prędkości dwóch punktu tarczy II, ale nie znamy ich wartości. To jednak wystarczy. Możemy dzięki temu wyznaczyć chwilowy środek prędkości tarczy II. Poprowadźmy w tym celu proste prostopadłe do wektorów prędkości których kierunek znamy.



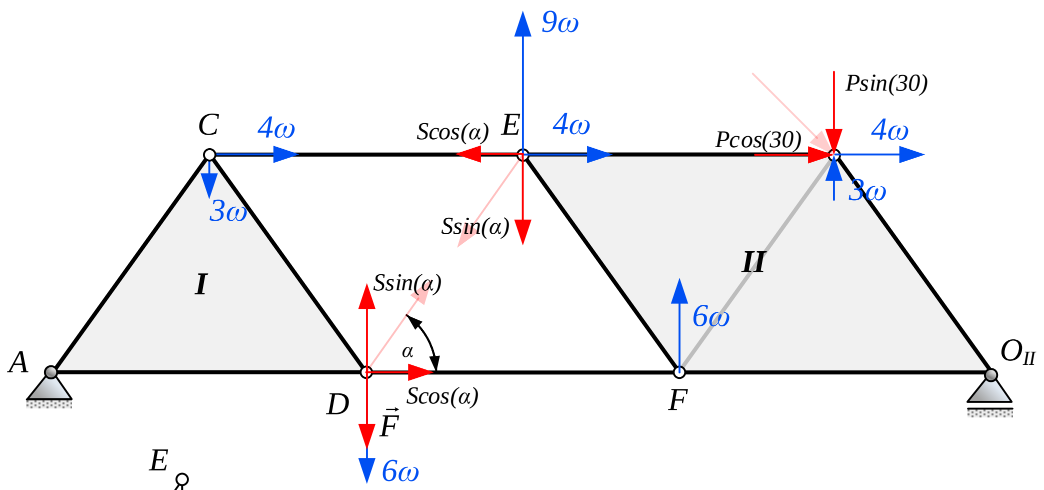
Tak więc punkt B jest chwilowym środkiem prędkości dla tarczy II. Zwrot prędkości kątowej określamy za pomocą znanej nam składowej poziomej prędkości punktu E. Za jej pomocą policzymy również wartość prędkości kątowej ω_{II}.

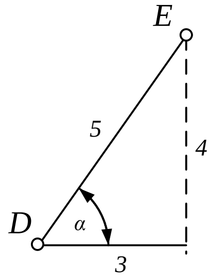
$$\omega_{II} \cdot 4 = 4 \cdot \omega$$
$$\omega_{II} = \omega$$

Znając prędkość kątową tarczy dwa obliczymy wszystkie składowe prędkości punktów tarczy II.



Teraz do tego schematu dołóżmy siły zewnętrzne i siły reakcji interesującego nas pręta. Siły od razu rozłóżmy na składowe.





$$\sin(\alpha)=\frac{4}{5}=0,8$$

$$\cos(\alpha)=\frac{3}{5}=0,6$$

Teraz wystarczy zapisać równanie pracy przygotowanej, która w przypadku układu statycznego powinna być równa 0. W tym wypadku mamy do czynienia z mocami chwilowymi lecz przy więzach geometrycznych (czyli takich jakie tutaj występują) prędkości chwilowe są proporcjonalne do przemieszczeń przygotowanych. Można w takim wypadku operować na iloczynie wektorów prędkości i sił.

$$\delta W = 0$$

$$F\cdot 6\omega - S\sin\alpha\cdot 6\omega - S\cos\alpha\cdot 4\omega - S\sin\alpha\cdot 9\omega + P\cos(30)\cdot 4\omega - P\sin(30)\cdot 3\omega = 0$$

Możemy to równanie obustronnie podzielić przez ω i uporządkować.

$$S(6\sin\alpha + 4\cos\alpha + 9\sin\alpha) = 6F + 4P\cos(30) - 3P\sin(30)$$

Ostatecznie:

$$S = \frac{6F + 4P\cos(30) - 3P\sin(30)}{6\sin\alpha + 4\cos\alpha + 9\sin\alpha}$$

$$S = \frac{120 + 40\frac{\sqrt{3}}{2} - 15}{4,8 + 2,4 + 7,2} = 9,697kN$$

Wartość siły reakcji można sprawdzić innymi metodami: równoważenia węzłów; Cremony; Rittera. Jednak każda z tych metod wymaga obliczenia wcześniej sił reakcji.

Zadanie 7.

Wyznacz wartość siły reakcji pręta EH kratownicy przedstawionej na rysunku wykorzystując zasadę prac przygotowanych.