
Równania Lagrange'a II rodzaju - układy elektromechaniczne

dr inż. Sebastian Pakuła

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

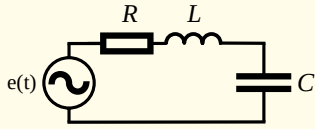
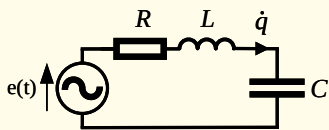
e-mail: spakula@agh.edu.pl
<http://home.agh.edu.pl/~spakula/>

Przykład:

Wyprowadź różniczkowe równanie przebiegu prądu w obwodzie szeregowym RLC stosując równania Lagrange'a II rodzaju.

Dane: $R, L, C, J_1, J_2, d_1, d_2, M, k_e, k_m$

Szukane: różniczkowe równanie

**Rozwiązanie:**

Oznaczam współrzędne opisujące przebiegi prądów w poszczególnych gałęziach układu elektrycznego. W tym wypadku użyję jednej współrzędnej q określających ładunek elektryczny. Pochodna ładunku $\dot{q} = i(t)$ to natężenie prądu elektrycznego.

Ustalam także kierunek siły elektromotorycznej $e(t)$ zgodnie z kierunkiem prądu, którego przepływ wymusza. Nie jest istotne, że siła jest zmienna, określłam układ współrzędnych.

Definiuję **energie kinetyczną**:

$$E = \frac{1}{2} L \dot{q}^2$$

Energia potencjalna:

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2$$

Funkcja dyssypacji energii:

$$D = \frac{1}{2} R \dot{q}^2$$

Pracę wirtualną w układach elektrycznych wykonują siły pola elektrycznego (siły elektromotoryczne) na przesunięciu ładunku elektrycznego δq . W związku z tym:

$$\delta W = e(t) \delta q$$

stąd siłą uogólnioną jest wszystko to co wykonuje pracę na przemieszczeniu przygotowanym (wirtualnym) we współrzędnej uogólnionej q . Tak więc:

$$Q = e(t)$$

Następnie obliczamy pochodne zgodne z równaniami Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right) = L \ddot{q} \quad \frac{\partial E}{\partial q} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial q} = \frac{1}{C} q \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = R \dot{q}$$

Ostatecznie równania Lagrange'a II rodzaju dla obwodu RLC przedstawiają się następująco:

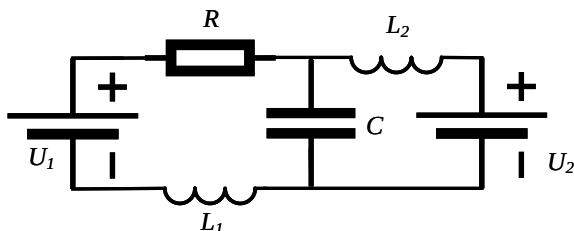
$$L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{q}{C} = e(t)$$

1 Zadanie

Wyprowadź różniczkowe równania przedstawiające dynamikę obwodu elektrycznego jak na poniższym rysunku.

Dane: R, C, L_1, L_2, U_1, U_2

Szukane: różniczkowe równanie

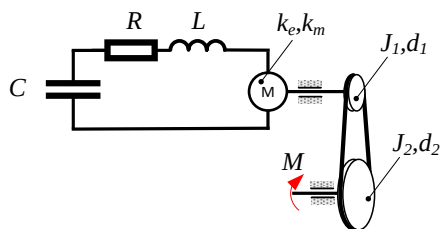


2 Zadanie

Wyznacz różniczkowe równania przebiegu prądów w obwodzie RLC prądnicy napędzanej stałym momentem napędowym M poprzez zespół przekładni.

Dane: $R, L, C, J_1, J_2, d_1, d_2, M, k_e, k_m$

Szukane: różniczkowe równanie ruchu



k_e - stała elektryczna silnika

k_m - stała mechaniczna silnika

$$U_{SEM} = k_e \cdot \dot{\varphi}$$

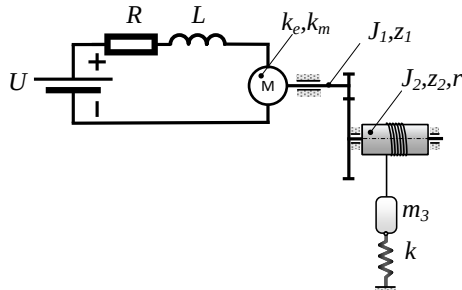
$$M_e = k_m \cdot \dot{q}$$

3 Zadanie

Wyznacz różniczkowe równania układu podnoszenia szyby samochodowej za pomocą przekładni zębatej napędzanej silnikiem prądu stałego.

Dane: $R, L, C, m_1, J_1, J_2, z_1, z_2, U, k_e, k_m$

Szukane: różniczkowe równanie ruchu



k_e - stała elektryczna silnika

k_m - stała mechaniczna silnika

$$U_{SEM} = k_e \cdot \dot{\varphi}$$

$$M_e = k_m \cdot \dot{q}$$

4 Zadanie

Wyprowadź różniczkowe równanie ruchu układu elektromechanicznego pokazanego na rysunku. Źródło napięcia przemiennego $e(t)$ zasila cewkę elektromagnesu o zmiennej indukcyjności, która zależy od przemieszczenia się rdzenia ferromagnetycznego wewnątrz niej $L(x) = k_l x^2$. W cewce indukuje się siła elektromotoryczna $U_{SEM} = k_e \dot{x}$ oraz siła popychająca rdzeń cewki $F = k_m i$, gdzie i - natężenie prądu płynącego przez cewkę.

Dane: $e(t), R, L(x), m_1, m, J, r, R, k_e, k_l, k_m$

Szukane: różniczkowe równania

