
Równania Lagrange'a II r. *przykłady*

dr inż. Sebastian Pakuła

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

5 kwietnia 2024

e-mail: spakula@agh.edu.pl

Wzór:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (1)$$

L – potencjał kinetyczny

\dot{q}_i – prędkość uogólniona

q_i – współrzędna uogólniona

Q_i – siła uogólniona

Potencjał kinetyczny:

$$L = E - U$$

gdzie:

E – energia kinetyczna

U – energia potencjalna

Wskazówka: Jeśli energia kinetyczna nie zależy od współrzędnych uogólnionych to wzór (1) można zastąpić wzorem:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right] + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (2)$$

Gdy w układach występuje rozpraszanie energii, wyraża się je przez tzw. *funkcję dysypacji energii* – $D = \frac{1}{2}b\dot{x}^2$. Równanie Lagrange'a przyjmuje wówczas postać:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (3)$$

albo po rozpisaniu, że $L = E - U$:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial E}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (4)$$

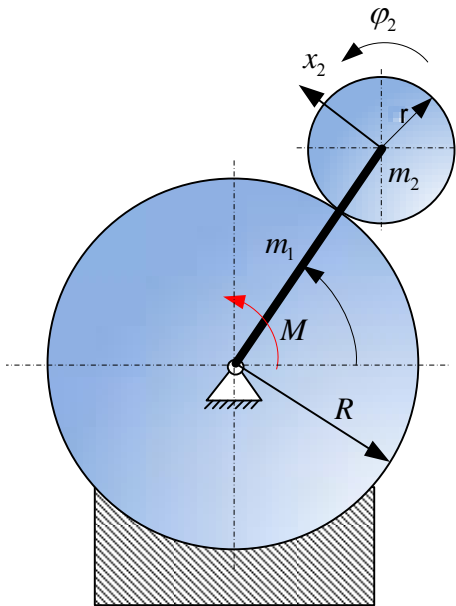
lub jeśli energia kinetyczna nie zależy od współrzędnej uogólnionej q (tzn. $\frac{\partial E}{\partial q} = 0$), to:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right] + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (5)$$

Poniżej przedstawię kilka przykładów wyznaczania dynamicznych równań ruchu za pomocą równań Lagrange'ego II rodzaju.

Przykład 1: Wyznacz przyspieszenia brył, korzystając z metody równań Lagrange'a II rodzaju.

Dane: m_1, m_2, R, r, M



Równania więzów:

$$\begin{cases} \varphi_1 (R + r) = x_2 \\ x_2 = \varphi_2 r \end{cases}$$

Współrzędna uogólniona:

$$q = \{\varphi_1\}$$

Przekształcone równania więzów:

$$\begin{cases} x_2 = \varphi_1 (R + r) \\ \varphi_2 = \varphi_1 \frac{(R + r)}{r} \end{cases}$$

Przemieszczenia wirtualne:

$$\begin{cases} \delta x_2 - \delta \varphi_1 (R + r) = 0 \\ \delta \varphi_2 - \delta \varphi_1 \frac{(R + r)}{r} = 0 \end{cases}$$

Praca wirtualna układu:

$$\delta W = M \delta \varphi_1, \text{ stąd siła uogólniona:}$$

$$Q_{\varphi_1} = M$$

Momenty bezwładności figur wynoszą odpowiednio:

$$J_1 = \frac{m_1 (R + r)^2}{3}, J_2 = \frac{m_2 r^2}{2}$$

Energia kinetyczna układu:

$$E = \frac{1}{2} [J_1 \dot{\varphi}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2] = \frac{1}{2} \dot{\varphi}_1^2 \left[J_1 + m_2 (R + r)^2 + J_2 \frac{(R + r)^2}{r^2} \right]$$

Energia potencjalna układu:

$$U = m_1 g \frac{(R + r)}{2} \sin(\varphi_1) + m_2 g (R + r) \sin(\varphi_1)$$

Pochodne energii:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) &= \ddot{\varphi}_1 \left[J_1 + m_2 (R + r)^2 + J_2 \frac{(R + r)^2}{r^2} \right] \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} &= m_1 g \frac{(R + r)}{2} \cos(\varphi_1) + m_2 g (R + r) \cos(\varphi_1) \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} &= g (R + r) \cos(\varphi_1) \left[\frac{m_1}{2} + m_2 \right] \end{aligned}$$

Po podstawieniu pochodnych do równań Lagrange'a:

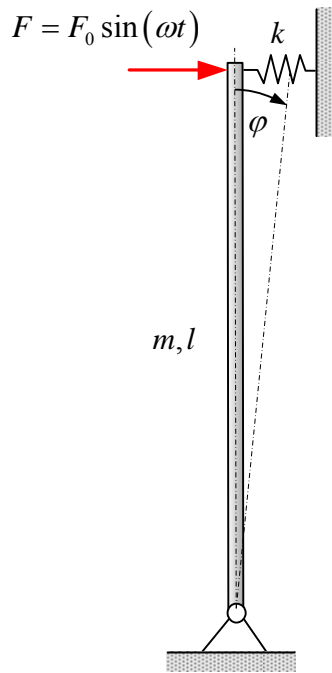
$$\ddot{\varphi}_1 \left[J_1 + m_2 (R + r)^2 + J_2 \frac{(R + r)^2}{r^2} \right] + \left[\frac{m_1}{2} + m_2 \right] g (R + r) \cos(\varphi_1) = M$$

Ostatecznie przyspieszenie:

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{M - \left[\frac{m_1}{2} + m_2\right] g (R + r) \cos(\varphi_1)}{J_1 + m_2(R + r)^2 + J_2 \frac{(R+r)^2}{r^2}}$$

Przykład 2: Wyznacz różniczkowe równanie ruchu belki korzystając z metody równań Lagrange'a II rodzaju.

Dane: m, l, k, ω, F_0



Równania więzów:

Brak

Współrzędna uogólniona:

$$q = \{\varphi\}$$

Praca wirtualna układu:

$\delta W = F \delta \varphi r$, stąd siła uogólniona:

$$Q_\varphi = Fr$$

Momenty bezwładności belki:

$$J_1 = \frac{ml^2}{3}$$

Energia kinetyczna układu:

$$E = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2$$

Energia potencjalna układu:

$$U = mg \frac{l}{2} \cos(\varphi) + \frac{k(\varphi l)^2}{2}$$

Pochodne energii:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) &= J \ddot{\varphi} \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} &= -mg \frac{l}{2} \sin(\varphi) + k \varphi l^2 \cong \left(kl - \frac{mg}{2} \right) \varphi l \end{aligned}$$

Po podstawieniu pochodnych do równań Lagrange'a:

$$J \ddot{\varphi} + \left(kl - \frac{mg}{2} \right) \varphi l = F_0 l \sin(\omega t)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{3 \left(kl - \frac{mg}{2} \right)}{ml} \varphi = \frac{3F_0}{ml} \sin(\omega t)$$

Powyższe równanie można sprowadzić do postaci różniczkowego równania ruchu wymuszonych drgań harmoniczných:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = A \sin(\omega t)$$

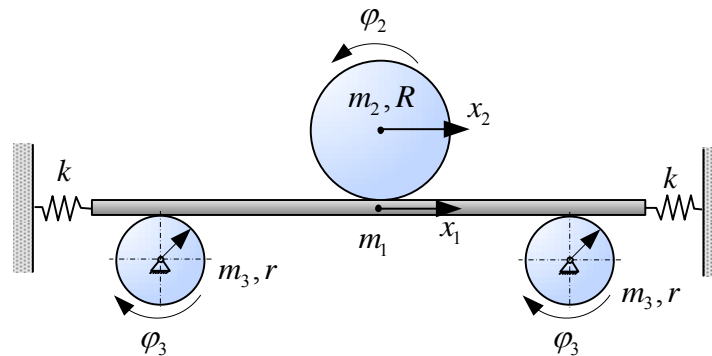
gdzie:

ω_0^2 – częstość drgań własnych,

A – amplituda.

Przykład 3: Wyznacz różniczkowe równanie ruchu belki korzystając z metody równań Lagrange'a II rodzaju.

Dane: m_1, m_2, m_3, R, r, k



Równania więzów:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_3 r \\ x_2 + \varphi_2 R = x_1 \end{cases}$$

Współrzędne uogólnione:

$$q = \{x_1, \varphi_2\}$$

Energia kinetyczna:

$$E = \frac{1}{2} [m_1 \dot{x}_1^2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + 2J_3 \dot{\varphi}_3^2]$$

$$E = \frac{1}{2} \left[m_1 \dot{x}_1^2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 (\dot{x}_1 - \dot{\varphi}_2 R)^2 + 2 \frac{J_3}{r^2} \dot{x}_1^2 \right]$$

Energia potencjalna:

$$U = 2 \left(\frac{k x_1^2}{2} \right)$$

Pochodne:

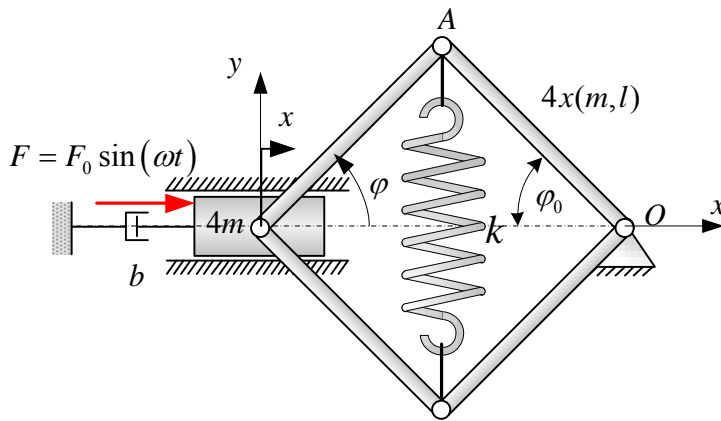
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}_1} \right) &= \left(m_1 + m_2 + \frac{2J_3}{r^2} \right) \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{\varphi}_2 R & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) &= (J_2 + m_2 R^2) \ddot{\varphi}_2 - m_2 R \ddot{x}_1 \\ \frac{\partial U}{\partial x_1} &= 2kx_1 & \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} &= 0 \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy układ dwóch równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} \left(m_1 + m_2 + \frac{2J_3}{r^2} \right) \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{\varphi}_2 R + 2kx_1 &= 0 \\ (J_2 + m_2 R^2) \ddot{\varphi}_2 - m_2 R \ddot{x}_1 &= 0 \end{aligned}$$

Przykład 4: Wyznacz różniczkowe równanie ruchu belki korzystając z metody równań Lagrange'a II rodzaju.

Dane: m, l, k, ω, F_0



Równanie więzu i pochodne:

$$x = 2l \cos(\varphi_0) - 2l \cos(\varphi)$$

$$\dot{x} = 2l \sin(\varphi) \dot{\varphi}$$

Współrzędna uogólniona:

$$q = \{\varphi\}$$

Przeszczenia wirtualne:

$$\delta x = 2l \sin(\varphi) \delta \varphi$$

Praca wirtualna układu:

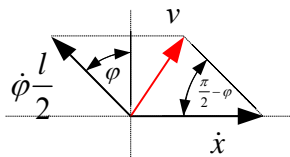
$$\delta W = F \delta x$$

$$\delta W = F 2l \sin(\varphi) \delta \varphi$$

Siła uogólniona:

$$Q_\varphi = F 2l \sin(\varphi)$$

Dwa ramiona czworoboku poruszają się ruchem obrotowym, a dwa pozostałe ruchem płaskim. Aby wyznaczyć energię ruchu płaskiego ramion, należy wyznaczyć prędkości środków ich mas. Można ją wyznaczyć z zasady superpozycji, której zastosowanie pokazano na rysunku:



Prędkość środka masy elementu łącznikowego v możemy policzyć z twierdzenia cosinusów.

$$[p0.1mml]v^2 = \dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2 \frac{l^2}{4} - 2\dot{x}\dot{\varphi} \frac{l}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2 \frac{l^2}{4} - \dot{x}\dot{\varphi} l \sin \varphi$$

Moment bezwładności ramion mechanizmu względem osi przechodzących przez ich środki mas (główny moment bezwładności):

$$J = \frac{ml^2}{12}, \text{ a względem jego końca } J_0 = \frac{ml^2}{3}$$

Energia kinetyczna:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}4m\dot{x}^2 + 2\left(\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mv^2\right) + 2\frac{1}{2}J_0\dot{\varphi}^2 \\ &= 2m\dot{x}^2 + \frac{ml^2}{12}\dot{\varphi}^2 + m\dot{x} + \frac{ml^2}{4}\dot{\varphi}^2 - m\dot{x}\dot{\varphi}l \sin \varphi + \frac{ml^2}{3}\dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{2}{3}ml^2\dot{\varphi}^2 - m\dot{x}\dot{\varphi}l \sin \varphi + 3m\dot{x}^2 \\ &= ml^2\dot{\varphi}^2 \left(10 \sin^2(\varphi) + \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Energia potencjalna:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}k [2(l \sin \varphi - l \sin \varphi_0)]^2 \\ &= 2kl^2 (\sin \varphi - \sin \varphi_0)^2 \end{aligned}$$

Uwaga: Energia kinetyczna zależy od współrzędnej uogólnionej φ , zatem nie można wykorzystać uproszczonego wzoru Lagrange (5), tylko należy zastosować wzór ogólny (3) lub (4).

Potencjał kinetyczny L :

$$L = ml^2\dot{\varphi}^2 \left(10 \sin^2(\varphi) + \frac{2}{3}\right) - 2kl^2 (\sin \varphi - \sin \varphi_0)$$

Pochodne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= 2ml^2\dot{\varphi} \left(10 \sin^2(\varphi) + \frac{2}{3}\right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= 2ml^2\ddot{\varphi} \left(10 \sin^2(\varphi) + \frac{2}{3}\right) + 40ml^2\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi \\ &= 2ml^2\ddot{\varphi} \left(10 \sin^2(\varphi) + \frac{2}{3}\right) + 20ml^2\dot{\varphi} \sin(2\varphi) \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= ml^2\dot{\varphi}^2 10 \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi - 4kl^2 (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \cos \varphi \\ &= 4l^2 \sin \varphi \cos \varphi (5m\dot{\varphi} - k) + 4kl^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi \\ &= 2l^2 \sin(2\varphi) (5m\dot{\varphi} - k) + 4kl^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi \\ \frac{\partial D}{\partial \varphi} &= 4bl^2 \sin^2(\varphi)\dot{\varphi} \end{aligned}$$

Wstawiając pochodne do równania (3) otrzymujemy różniczkowe równanie ruchu układu:

$$\begin{aligned} 2ml^2\ddot{\varphi} \left(10 \sin^2(\varphi) + \frac{2}{3}\right) + 20ml^2\dot{\varphi} \sin(2\varphi) - 2l^2 \sin(2\varphi) (5m\dot{\varphi} - k) - 4kl^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi \\ + 4bl^2 \sin^2(\varphi)\dot{\varphi} = 2lF \sin \varphi \end{aligned}$$

lub po redukcji:

$$2ml^2\ddot{\varphi} \left(10 \sin^2(\varphi) + \frac{2}{3} \right) + \sin(2\varphi) (10ml^2\dot{\varphi} + 2kl^2) - 4kl^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi \\ + 4bl^2 \sin^2(\varphi)\dot{\varphi} = 2lF_0 \sin(\omega t) \sin \varphi$$