

---

# Drgania nietłumione o wielu stopniach swobody

---

dr inż. Sebastian Pakuła

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

e-mail: [spakula@agh.edu.pl](mailto:spakula@agh.edu.pl)

## Wzory:

Podstawowe wzory dotyczące układów o jednym stopniu swobody.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \left[ \frac{rad}{s} \right] \quad - \text{częstość drgań własnych} \quad (1)$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad [s] \quad - \text{okres drgań własnych} \quad (2)$$

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad [Hz] \quad - \text{częstotliwość drgań własnych} \quad (3)$$

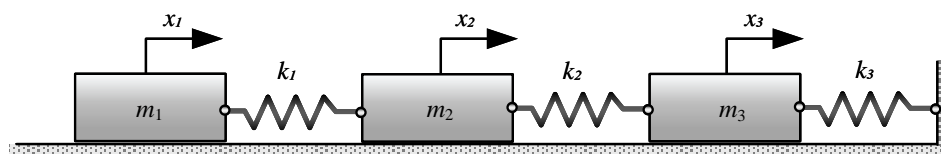
$$(4)$$

$k$  – współczynnik sprężystości układu

$m$  – masa układu

## Drgania własne układu trzech mas

Rozpatrywany jest układ trzech mas połączonych za pomocą różnych sprężyn tak jak przedstawiono na rysunku 1.



Rysunek 1: Model fizyczny układu trzech mas połączonych sprężynami

Do rozwiązania przyjmijmy następujące warunki początkowe.

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_0 & \dot{x}_1(0) &= 0 \\ x_2(0) &= 0 & \dot{x}_2(0) &= 0 \\ x_3(0) &= 0 & \dot{x}_3(0) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Podstawą wyznaczenia równań ruchu są różniczkowe równania ruchu. Wyznamy je posługując się równaniami Lagrange'a II rodzaju. W tym celu wyznaczmy energie kinetyczną oraz potencjalną układu.

**Energia kinetyczna:**

$$E = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_1 \dot{x}_2^2 + m_1 \dot{x}_3^2) \quad (6)$$

**Energia potencjalna:**

$$U = \frac{1}{2} (k_1 (x_1 - x_2)^2 + k_2 (x_2 - x_3)^2 + k_3 x_3^2) \quad (7)$$

**Równania Lagrange'a II rodzaju:**

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 (x_1 - x_2) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_1 (x_2 - x_1) + k_2 (x_2 - x_3) = 0 \\ m_3 \ddot{x}_3 + k_2 (x_3 - x_2) + k_3 x_3 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Równania (8) wygodnie jest przedstawić w postaci macierzowej  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0$ :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Rozwiązania przewidujemy w postaci:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t) & x_2 &= A_2 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t) & x_3 &= A_3 \sin(\omega t) + B_3 \cos(\omega t) \\ \dot{x}_1 &= A_1 \omega \cos(\omega t) - B_1 \omega \sin(\omega t) & \dot{x}_2 &= A_2 \omega \cos(\omega t) - B_2 \omega \sin(\omega t) & \dot{x}_3 &= A_3 \omega \cos(\omega t) - B_3 \omega \sin(\omega t) \\ \ddot{x}_1 &= -\omega^2 x_1 & \ddot{x}_2 &= -\omega^2 x_2 & \ddot{x}_3 &= -\omega^2 x_3 \end{aligned}$$

Po podstawieniu do równania macierzowego (9) otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} -m_1 \omega^2 + k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & -m_2 \omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & -m_3 \omega^2 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t) \\ A_2 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t) \\ A_3 \sin(\omega t) + B_3 \cos(\omega t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Równania te muszą być spełnione dla każdej chwili czasowej. W związku z tym, jeżeli  $\sin(\omega t) = 1$  to  $\cos(\omega t) = 0$ . Wówczas z równania (10) otrzymujemy równanie macierzowe w postaci:

$$\begin{bmatrix} -m_1 \omega^2 + k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & -m_2 \omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & -m_3 \omega^2 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Podobnie jeśli  $\cos(\omega t) = 1$  to  $\sin(\omega t) = 0$ . Równanie (10) przyjmie postać:

$$\begin{bmatrix} -m_1 \omega^2 + k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & -m_2 \omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & -m_3 \omega^2 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

W dalszej części skoncentrujemy się na rozwiązaniu równania (11). Rozwiązanie równania (12) będzie analogiczne. Niezerowe amplitudy  $A_i$  z równania macierzowego (11) otrzymamy tylko wtedy, gdy wyznacznik macierzy współczynników będzie równy 0. Równanie to nazywamy równaniem charakterystycznym.

$$\begin{aligned} &-(m_1 m_2 m_3) \omega^6 + (m_1 m_3 (k_1 + k_2) + m_1 m_2 (k_2 + k_3) + k_1 m_2 m_3) \omega^4 + \\ &-(m_2 (k_1 k_2 + k_1 k_3) + m_1 (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) + k_1 k_2 m_3) \omega^2 + k_1 k_2 k_3 = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Rozwiązanie analityczne równania (13), które jest wielomianem 6 stopnia z wieloma parametrami nie jest łatwe. Dlatego rozwiązaliśmy je numerycznie podstawiając przykładowe dane:

Symbol	Wartość	Jednostka
$m_1$	10	$[kg]$
$m_2$	8	$[kg]$
$m_3$	5	$[kg]$
$k_1$	2000	$[N/m]$
$k_2$	1500	$[N/m]$
$k_3$	1000	$[N/m]$

Po podstawieniu danych i zredukowaniu równanie charakterystyczne przyjmie postać:

$$-2\omega^6 + 2275\omega^4 - 600000\omega^2 + 15000000 = 0 \quad (14)$$

Rozwiązaniem takiego równania jest 6 liczb czysto urojonych.

$$\omega_{1-} = -5.2796$$

$$\omega_{1+} = +5.2796$$

$$\omega_{2-} = -18.9201$$

$$\omega_{2+} = +18.9201$$

$$\omega_{3-} = -27.4163$$

$$\omega_{3+} = +27.4163$$

Są to dokładnie trzy pary pierwiastków o tych samych wartościach lecz przeciwnych znakach. Fizyczną interpretację mają tylko dodatnie wartości częstości drgań w związku z tym rozpatrujemy trzy pierwiastki równania charakterystycznego  $\omega_1, 2, 3$ . Dla każdego z trzech pierwiastków równania charakterystycznego istnieje rozwiązanie szczególne w postaci:

$$x(t) = A_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t) \quad (15)$$

Gdzie  $\omega$  nazywamy częstością drgań własnych. W związku z tym, że trzy pierwiastki dodatnie spełniają układ równań różniczkowych, całkowitą ogólną układu równań jest suma rozwiązań.

$$x_i(t) = \sum_{n=1}^3 (A_{in} \sin(\omega_n t) + B_{in} \cos(\omega_n t)) \quad (16)$$

Gdzie  $n$  oznacza numer pary pierwiastków ( $n=1,2,3$ ), a  $i$  to indeks współrzędnej uogólnionej  $x$  ( $i=1,2,3$ ). W ten sposób otrzymamy łącznie  $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$  niewiadomych  $A_{in}$  oraz  $B_{in}$ . Te niewiadome zostaną wyznaczone z 6 warunków początkowych oraz po wyznaczeniu form drgań (modów).

## Formy drgań - analiza modalna

Aby wyznaczyć formy drgań, do równań różniczkowych podstawiamy kolejne pierwiastki równania charakterystycznego.

## Pierwsza forma drgań

Zacznijmy od pierwszej pary pierwiastków równania tj.  $\omega_1 = 5.2796$ . Podstawmy tę wartość do układu równań (10). Otrzymujemy wówczas:

$$\begin{bmatrix} 1721,26 & -2000 & 0 \\ -2000 & 3277,01 & -1500 \\ 0 & -1500 & 2360,63 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Drugi indeks w oznaczeniu amplitud wskazuje numer wartości własnej macierzy (formy drgań) z którą kojarzona jest ta amplituda (w tym wypadku 1). W związku z tym, że wyznacznik macierzy jest równy 0, mamy do czynienia z układem równań liniowo zależnych. Zatem jedna z amplitud będzie parametrem, który przyjmijmy dowolnie. Niech to będzie  $A_{11} = 1$ . Wówczas tylko dwa równania są liniowo niezależne. Dlatego usuwamy jedno z nich np. pierwsze.

$$\begin{bmatrix} -2000 & 3277,01 & -1500 \\ 0 & -1500 & 2360,63 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pierwszą kolumnę pomnożoną przez 1 przenosimy na drugą stronę otrzymując równanie:

$$\begin{bmatrix} 3277,01 & -1500 \\ -1500 & 2360,63 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Następnie obliczamy amplitudy  $A_{21}$  oraz  $A_{31}$  dowolną metodą. W tym wypadku amplitudy zostaną policzone przez pomnożenie lewostronnie przez macierz odwrotną macierzy współczynników występujących przy wektorze amplitud.

$$\begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2000 & 3277,01 & -1500 \\ 0 & -1500 & 2360,63 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ostatecznie wektor amplitud związanych z pierwszą wartością własną ma wartość:

$$\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8606 \\ 0.5469 \end{bmatrix}$$

Wyznamy współczynniki pierwszej postaci drgań jako stosunki amplitud:

$$\begin{aligned} \mu_{21} &= \frac{A_{21}}{A_{11}} = 0.8606 \\ \mu_{31} &= \frac{A_{31}}{A_{11}} = 0.5469 \end{aligned} \tag{17}$$

Drugi indeks oznacza numer formy drgań. W związku z tym  $(n-1)$  nie znanych amplitud  $A$  możemy obliczyć wg równania:

$$A_{21} = A_{11} \cdot \mu_{21}, \quad A_{31} = A_{11} \cdot \mu_{31} \tag{18}$$

Wspomnieliśmy, że równanie macierzowe (12) ma analogiczne rozwiązanie do równania (11). W związku z tym spełniona jest także zależność:

$$B_{21} = B_{11} \cdot \mu_{21}, \quad B_{31} = B_{11} \cdot \mu_{31} \tag{19}$$

## Druga forma drgań

Postępując analogicznie jak dla pierwszej formy drgań, tym razem do równania (11) podstawiamy drugą częstość drgań własnych tj.  $\omega_2 = 18.9201$ . Wyznaczone w taki sam sposób współczynniki drugiej formy drgań wynoszą.

$$\begin{aligned}\mu_{22} &= \frac{A_{22}}{A_{12}} = -0.7899 \\ \mu_{32} &= \frac{A_{32}}{A_{12}} = -1.6684\end{aligned}\tag{20}$$

Ujemne wartości współczynników formy (postaci) drgań  $\mu_{22}$  oraz  $\mu_{32}$  oznaczają, że w trakcie ruchu harmonicznego masy  $m_1$ , pozostałe masy  $m_2$  oraz  $m_3$  poruszają się przeciwnie.

## Trzecia forma drgań

Trzecia częstość drgań własnych wynosi  $\omega_3 = 27.4163$ . Dla tej częstości otrzymujemy współczynniki trzeciej formy drgań.

$$\begin{aligned}\mu_{23} &= \frac{A_{23}}{A_{13}} = -2.7583 \\ \mu_{33} &= \frac{A_{33}}{A_{13}} = 3.2882\end{aligned}\tag{21}$$

Wartości współczynników trzeciej formy drgań świadczą o tym, że w trakcie ruchu z tą formą druga masa  $m_2$  przemieszcza się przeciwnie do pozostałych o masach  $m_1$  i  $m_3$ .

## Graficzna prezentacja form drgań

Formy drgań zostały przedstawione graficznie w tabeli 1. Po kliknięciu na obrazek zostanie wyświetlona animacja ruchu mas z daną formą<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Odtwarzanie animacji może nie działać w przeglądarkach internetowych. W takim wypadku należy pobrać plik pdf na dysk i odtworzyć z natywnego oprogramowania do odtwarzania plików pdf np. darmowego [Foxit Reader](#).

Forma	wizualizacja	$\omega_i$ [1/s]
I		5.2796
II		18.9201
III		27.4163

Tabela 1: Wizualizacja form drgań

## 1 Całka ogólna układu równań

To z jaką formą drga układ zależy od warunków początkowych. Dla dowolnie przyjętych warunków początkowych (tak jak w rozpatrywanym przypadku) wypadkowym ruchem jest kombinacja liniowa wszystkich trzech form. Całki ogólne wg równania (16) po podstawieniu zależności (18) i (19) przyjmują postać:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= A_{11} \sin(\omega_1 t) + B_{11} \cos(\omega_1 t) + A_{12} \sin(\omega_2 t) + B_{12} \cos(\omega_2 t) + A_{13} \sin(\omega_3 t) + B_{13} \cos(\omega_3 t) \\
 x_2(t) &= A_{11} \mu_{21} \sin(\omega_1 t) + B_{11} \mu_{21} \cos(\omega_1 t) + A_{12} \mu_{22} \sin(\omega_2 t) + B_{12} \mu_{22} \cos(\omega_2 t) + \\
 &\quad + A_{13} \mu_{23} \sin(\omega_3 t) + B_{13} \mu_{23} \cos(\omega_3 t) \\
 x_3(t) &= A_{11} \mu_{31} \sin(\omega_1 t) + B_{11} \mu_{31} \cos(\omega_1 t) + A_{12} \mu_{32} \sin(\omega_2 t) + B_{12} \mu_{32} \cos(\omega_2 t) + \\
 &\quad + A_{13} \mu_{33} \sin(\omega_3 t) + B_{13} \mu_{33} \cos(\omega_3 t)
 \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu współczynników form drgań, równania przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= A_{11} \sin(\omega_1 t) + B_{11} \cos(\omega_1 t) + A_{12} \sin(\omega_2 t) + B_{12} \cos(\omega_2 t) + A_{13} \sin(\omega_3 t) + B_{13} \cos(\omega_3 t) \\
 x_2(t) &= 0.8606 A_{11} \sin(\omega_1 t) + 0.8606 B_{11} \cos(\omega_1 t) - 0.7899 A_{12} \sin(\omega_2 t) - 0.7899 B_{12} \cos(\omega_2 t) + \\
 &\quad - 2.7583 A_{13} \sin(\omega_3 t) - 2.7583 B_{13} \cos(\omega_3 t) \\
 x_3(t) &= 0.5469 A_{11} \sin(\omega_1 t) + 0.5469 B_{11} \cos(\omega_1 t) - 1.6684 A_{12} \sin(\omega_2 t) - 1.6684 B_{12} \cos(\omega_2 t) + \\
 &\quad + 3.2882 A_{13} \sin(\omega_3 t) + 3.2882 B_{13} \cos(\omega_3 t)
 \end{aligned} \tag{22}$$

W ten sposób pozostało do wyznaczenia 6 niewiadomych  $A_{1n}$  oraz  $B_{1n}$  dla  $n=1,2,3$ , które zostaną wyznaczone z warunków początkowych (5).

$$\begin{aligned}
 x_0 &= B_{11} + B_{12} + B_{13} \\
 0 &= 0.8606 B_{11} - 0.7899 B_{12} - 2.7583 B_{13} \\
 0 &= 0.5469 B_{11} - 1.6684 B_{12} + 3.2882 B_{13}
 \end{aligned} \tag{23}$$

lub w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{bmatrix}$$

Po zróżniczkowaniu równań (22) i podstawieniu warunków początkowych (5) dotyczących prędkości otrzymujemy.

$$\begin{aligned} 0 &= A_{11}\omega_1 + A_{12}\omega_2 + A_{13}\omega_3 \\ 0 &= 0.8606A_{11}\omega_1 - 0.7899A_{12}\omega_2 - 2.7583A_{13}\omega_3 \\ 0 &= 0.5469A_{11}\omega_1 - 1.6684B_{12}\omega_2 + 3.2882B_{13}\omega_3 \end{aligned} \quad (24)$$

lub w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu_{21}\omega_1 & \mu_{22}\omega_2 & \mu_{23}\omega_3 \\ \mu_{31}\omega_1 & \mu_{32}\omega_2 & \mu_{33}\omega_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix}$$

Po rozwiązaniu układów równań (23) oraz (24) otrzymujemy szukane amplitudy.

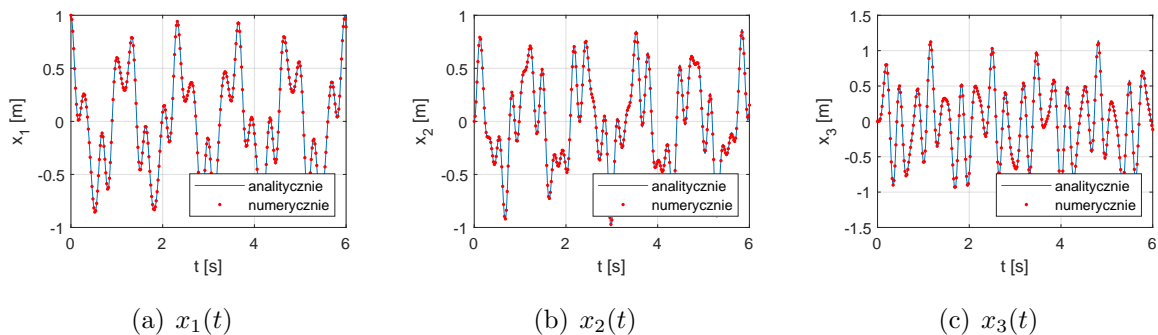
$$\begin{aligned} A_{11} &= 0 \\ A_{12} &= 0 \\ A_{13} &= 0 \\ B_{11} &= 0.574 x_0 \\ B_{12} &= 0.3459 x_0 \\ B_{13} &= 0.08005 x_0 \end{aligned} \quad (25)$$

Po uwzględnieniu obliczonych stałych, równania ruchu przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0.574 x_0 \cos(\omega_1 t) + 0.3459 x_0 \cos(\omega_2 t) + 0.08005 x_0 \cos(\omega_3 t) \\ x_2(t) &= 0.494 x_0 \cos(\omega_1 t) - 0.2732 x_0 \cos(\omega_2 t) - 0.2208 x_0 \cos(\omega_3 t) \\ x_3(t) &= 0.3139 x_0 \cos(\omega_1 t) - 0.5771 x_0 \cos(\omega_2 t) + 0.2632 x_0 \cos(\omega_3 t) \end{aligned} \quad (26)$$

## Przebiegi czasowe

Przebiegi czasowe na podstawie analitycznego rozwiązania i numerycznego przedstawione są na rysunku 2. Do numerycznego rozwiązania równań różniczkowych (8) wykorzystano metodę Rungego Kuty IV rzędu. Przyjęto, że masę pierwszą wychylono o  $x_0 = 1m$ .



Rysunek 2: Przebiegi czasowe uzyskane drogą analityczną i numeryczną



Poniżej przedstawiono animację pokazującą ruch mas na skutek przemieszczenia masy pierwszej o jeden metr.