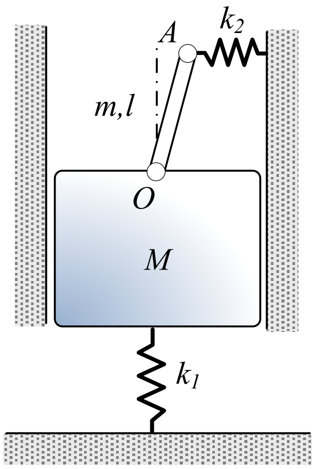
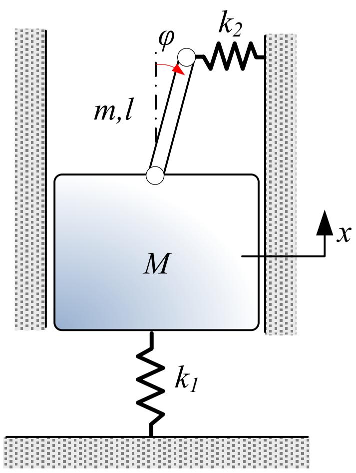
**Zadanie 1**




Jednorodny blok o masie $M$ i wymiarach $2a$ x $H$ połączony jest podłożem za pomocą sprężyny o sztywności $k_1$. Nieodkształcona sprężyna ma długość $l_0$. W punkcie O zamocowano jednorodny pręt OA o masie $m$ i długości $l$. Do końca pręta przymocowano sprężynę o sztywności $k_2$. Sprężyna jest zamocowana w taki sposób, że w czasie ruchu układu zachowuje ona położenie poziome i nie jest odkształcona, gdy pręt znajduje się w położeniu pionowym. W punkcie A działa znana siła $P(t)$ zachowująca kierunek pionowy. Pomijając opory ruchu oraz masę sprężyn, napisać równania Lagrange'a II rodzaju.

Do opisu ruchu układu przyjmuje dwie współrzędne $(x, \varphi)$:




Postać równania Lagrange'a II rodzaju.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial E}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = Q$$

$E$ – energia kinetyczna

$U$ – energia potencjalna

$Q$ – siła uogólniona

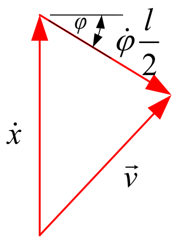
$q$ – współrzędna uogólniona

Równania energii:

$$E = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{ml^2}{12}\dot{\varphi}^2$$

$$U = Mgx + mg(x + l/2\cos\varphi) + \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2(\varphi l)^2$$

gdzie $v$ – prędkość środka masy pręta




Prędkość obliczam z twierdzenia cosinusów:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2 \frac{l^2}{4} - \dot{\varphi}\dot{x}l \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2 \frac{l^2}{4} - \dot{\varphi}\dot{x}l \cdot \sin\varphi$$

$$E = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2\frac{l^2}{4} - \dot{\varphi}\dot{x}l \cdot \sin\varphi\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{ml^2}{12}\dot{\varphi}^2$$

$$U = Mgx + mg(x + {}^{l}\!/_{2}\cos\varphi) + \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2(\varphi l)^2$$

Praca wirtualna:

$$\delta L = -P(t)\delta y_A$$

gdzie:

$$y_A = x + l\cos\varphi \qquad \delta y_A = \delta x - l\sin\varphi \cdot \delta\varphi$$

$$\delta L = -P(t)\delta x + P(t)l\sin\varphi \cdot \delta\varphi$$

Siły uogólnione:

$$Q_x = -P(t)$$
$$Q_\varphi = P(t)l\sin\varphi$$

Współrzędna $x$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m\dot{x} - \frac{1}{2}\dot{\varphi}l \cdot \sin\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}}\right) = M\ddot{x} + m\left(\ddot{x} - \frac{1}{2}\ddot{\varphi}l \cdot \sin\varphi - \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = Mg + mg + k_1x$$

Współrzędna $\varphi$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{ml^2}{4}\dot{\varphi} - \frac{1}{2}m\dot{x}l\sin\varphi + \frac{ml^2}{12}\dot{\varphi}^2 = \frac{ml^2}{3}\dot{\varphi} - \frac{1}{2}m\dot{x}l\sin\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}m\ddot{x}l\sin\varphi - \frac{1}{2}m\dot{x}\dot{\varphi}l\cos\varphi$$

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2}ml\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi$$

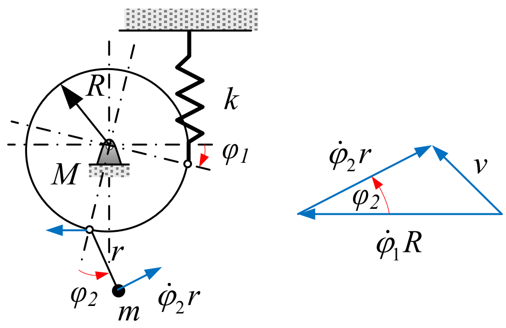
$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -mg\,{}^{l}\!/_{2}\sin\varphi + k_2l^2\varphi$$

Podstawiam pochodne do równań Lagrange'a II rodzaju:

$$\begin{cases} M\ddot{x} + m\left(\ddot{x} - \frac{1}{2}\ddot{\varphi}l\cdot\sin\varphi - \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) + Mg + mg + k_1 x = -P(t) \\ \frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}m\ddot{x}l\sin\varphi - \frac{1}{2}m\dot{x}\dot{\varphi}l\cos\varphi + \frac{1}{2}ml\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi - mg\,{}^{l}\!/_{2}\sin\varphi + k_2 l^2\varphi = P(t)\,l\sin\varphi / :1 \end{cases}$$

Po redukcji i uporządkowaniu:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + \frac{1}{2}ml\ddot{\varphi}\sin\varphi - \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2\cos\varphi + k_1 x = -P(t) - (M+m)g \\ \frac{ml}{3}\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}m\ddot{x}\sin\varphi - mg\,{}^{1}\!/_{2}\sin\varphi + k_2 l\varphi = P(t)\sin\varphi \end{cases}$$




W obliczeniach zakładam niewielkie kąty wychylenia krążka:

$$v^2 = \dot{\varphi}_2^2 r^2 + \dot{\varphi}_1^2 R^2 - 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 Rr\cos\varphi_2$$

Energia kinetyczna:

$$E = \frac{J\dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

$$E = \frac{MR^2}{4}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{\varphi}_2^2 r^2 + \dot{\varphi}_1^2 R^2 - 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 Rr\cos\varphi_2\right)$$

Energia potencjalna

$$U = \frac{k\varphi_1^2 R^2}{2} - mg\cos\varphi_2$$

Współrzędna $\varphi_1$

$$\frac{\partial E}{\partial\dot{\varphi}_1} = \frac{MR^2}{2}\dot{\varphi}_1 + \frac{m}{2}\left(2\dot{\varphi}_1 R^2 - 2\dot{\varphi}_2 Rr\cos\varphi_2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot{\varphi}_1}\right) = \frac{MR^2}{2}\ddot{\varphi}_1 + m\ddot{\varphi}_1 R^2 - mRr\left(\ddot{\varphi}_2\cos\varphi_2 - \dot{\varphi}_2^2\sin\varphi_2\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial\varphi_1} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi_1} = k\varphi_1$$

Współrzędna $\varphi_2$

$$\frac{\partial E}{\partial\dot{\varphi}_1} = m\left(\dot{\varphi}_2 r^2 - \dot{\varphi}_1 Rr\cos\varphi_2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot{\varphi}_1}\right) = m\ddot{\varphi}_2 r^2 - mRr\left(\ddot{\varphi}_1\cos\varphi_2 - \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial\varphi_2} = m\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 Rr\sin\varphi_2$$

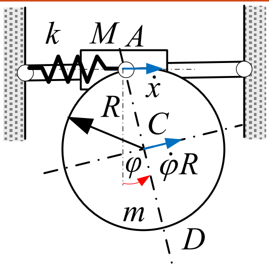
$$\frac{\partial U}{\partial\varphi_2} = mg\sin\varphi_2$$

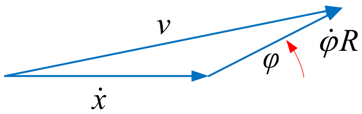
Podstawiam pochodne do równań Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{MR^2}{2}\ddot{\varphi}_1 + m\ddot{\varphi}_1 R^2 - mRr\left(\ddot{\varphi}_2\cos\varphi_2 - \dot{\varphi}_2^2\sin\varphi_2\right) + k\varphi_1 = 0$$

$$m\ddot{\varphi}_2 r^2 - mRr\left(\ddot{\varphi}_1\cos\varphi_2 - \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2\right) - m\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 Rr\sin\varphi_2 + mg\sin\varphi_2 = 0$$

**Zadanie 3**




Energia kinetyczna:

$$E = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

$$E = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\dot{\varphi}^2 R^2 + \dot{x}^2 - 2R\dot{\varphi}\dot{x}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right)$$

$$E = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\dot{\varphi}^2 R^2 + \dot{x}^2 + 2R\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi\right)$$

Energia potencjalna:

$$U = \frac{kx^2}{2} - mgR\cos\varphi$$

Pochodne:

Współrzędna $x$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m\left(\dot{x} + \dot{\varphi}\sin\varphi\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}}\right) = M\ddot{x} + m\left(\ddot{x} + \ddot{\varphi}R\sin\varphi + R\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = kx$$

Współrzędna $\varphi_1$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} = m\left(\dot{\varphi}R^2 + R\dot{x}\sin\varphi\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m\left(\ddot{\varphi}R^2 + R\ddot{x}\sin\varphi + R\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = mR\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = mgr\sin\varphi$$

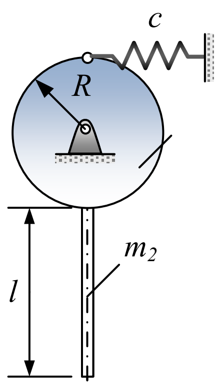
Podstawiam pochodne do równań Lagrange'a II rodzaju:

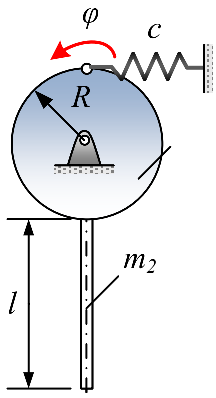
$$M\ddot{x} + m\left(\ddot{x} + \ddot{\varphi}R\sin\varphi + R\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) + kx = 0$$

$$m\left(\ddot{\varphi}R^2 + R\ddot{x}\sin\varphi + R\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right) - mR\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi + mgr\sin\varphi = 0$$

**Zadanie 4**

Stosując równania Lagrange'a 2 rodzaju wyprowadź równanie różniczkowe ruchu oraz oblicz częstość drgań swobodnych dla małych wychyleń z położenia równowagi dla układu przedstawionego na rysunku.




$m_1 = 26kg$

$m_2 = 6kg$

$R = 0,4m$

$g = 9,8\frac{m}{s^2}$

$c = 16\,{}^{N}\!/_{cm} = 1600\,{}^{N}\!/_{m}$

$l = 2R = 0,8\,\mathrm{m}$

Zredukowany moment bezwładności to moment bezwładności krążka $J_1$ oraz pręta $J_2$:

$$J_1 = \frac{m_1 R^2}{2} \qquad J_2 = \frac{m_2 l^2}{12}$$

$$J = J_1 + J_2 + m_2 \cdot \left(R + \frac{l}{2}\right)^2 = 6,24kg \cdot m^2$$

Postać równania Lagrange'a II rodzaju.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial E}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = Q$$

*E* – energia kinetyczna

*U* – energia potencjalna

*Q* – siła uogólniona

*q* – współrzędna uogólniona

Równanie energii kinetycznej:

$$E = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2}$$

Równanie energii potencjalnej:

$$U = \frac{c(\varphi R)^2}{2} - m_2 g\left(R + \frac{l}{2}\right)\cos\varphi = \frac{cR^2\varphi^2}{2} - m_2 g\left(R + \frac{l}{2}\right)\cos\varphi$$

Siły uogólnione (niepotencjalne)

*Q = 0* – brak

Pochodne:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} = J\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}}\right) = J\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = cR^2\varphi + m_2 g\left(R+\frac{l}{2}\right)\sin\varphi = \left[cR^2 + m_2 g\left(R+\frac{l}{2}\right)\right]\varphi$$

( $\sin\varphi \cong \varphi$ – dla niewielkich kątów)

Podstawiam do równania Lagrange'a

$$J\ddot{\varphi} + \left[cR^2 + m_2 g\left(R+\frac{l}{2}\right)\right]\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{cR^2 + m_2 g\left(R+\frac{l}{2}\right)}{J}\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$$

$$gdzie:\ \omega_0 = \sqrt{\frac{cR^2 + m_2 g\left(R+\frac{l}{2}\right)}{J}} = 6{,}97\,{}^{rad}\!/_{s}$$ – częstość drgań własnych