
Drgania tłumione o jednym stopniu swobody

dr inż. Sebastian Pakuła

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

e-mail: spakula@agh.edu.pl
<http://home.agh.edu.pl/~spakula/>

Przykład:

Wyznacz równanie ruchu belki wspartej układem sprężysto-tłumiącym, określ częstość drgań tłumionych oraz liczbę tłumienia. Przyjmij warunki początkowe: $\varphi(0) = \frac{\pi}{36}$, $\dot{\varphi}(0) = 0$

Dane:

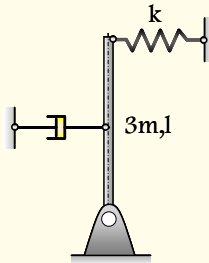
$$m = 2kg$$

$$k = 6000 \frac{N}{m}$$

$$b = 10 \frac{Ns}{m}$$

$$l = 1m$$

Szukane: $\omega_t, \xi, \varphi(t)$

**Rozwiązanie:**

Podstawą analizy dynamicznej są równania różniczkowe. Na podstawie drugiej zasady dynamiki Newtona lub równań Lagrange'a II rodzaju wyznaczamy różniczkowe równanie ruchu tego układu. Rozwiązaniem jest równanie:

$$ml^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{4}bl^2\dot{\varphi} + kl^2\varphi = 0 \quad / : ml^2 \quad (1)$$

Po podzieleniu przez ml^2 otrzymamy prostszą formę równania w postaci:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \quad (2)$$

gdzie:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} - \text{częstość drgań nietłumionych}$$

$$\beta = \frac{b}{8m} - \text{współczynnik tłumienia}$$

Poszukajmy rozwiązania w postaci:

$$\varphi = Ae^{rt} \quad (3)$$

Obliczając kolejne pochodne $\dot{\varphi} = rAe^{rt}$, $\ddot{\varphi} = r^2Ae^{rt}$ i podstawiając do równania (2) otrzymamy:

$$(r^2 + 2\beta r + \omega_0^2)A = 0 \quad (4)$$

Jedno z rozwiązań równania (4) jest rozwiązanie trywialne $A = 0$ gdzie układ znajduje się w spoczynku. Aby znaleźć rozwiązanie nietrywialne gdzie odbywa się ruch, należy nawias przy A przyrównać do 0. Równanie to nazywamy równaniem charakterystycznym:

$$r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0 \quad (5)$$

Wyznamy pierwiastki tego równania:

$$\Delta = 4\beta^2 - 4\omega_0^2$$

Zwykle $\beta \ll \omega_0$ i wówczas mówimy o drganiach podkrytycznych, w których oscylacje powoli zanikają. W przypadku gdy $\beta = \omega_0$ lub $\beta > \omega_0$ mówimy o drganiach odpowiednio krytycznych i nadkrytycznych. W takim wypadku nie występują oscylacje, i układ aperiodycznie zmierza do

położenia równowagi. Rozważmy przypadek drgań podkrytycznych, a więc $\beta < \omega_0$. W takiej sytuacji $\Delta < 0$ i $\sqrt{\Delta}$ będzie liczbą urojoną.

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-4(\omega_0^2 - \beta^2)} = i2\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Pierwiastkami równania charakterystycznego są:

$$r_1 = \frac{-2\beta - i2\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2} = -\beta - i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta - \omega_t \quad (6)$$

$$r_2 = \frac{-2\beta + i2\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2} = -\beta + i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta + \omega_t \quad (7)$$

Otrzymaliśmy parę pierwiastków zespolonych r_1 i r_2 . W powyższych równaniach wprowadzono oznaczenie $\omega_t = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Wartość tę nazywamy częstością drgań tłumionych. Skoro mamy dwa rozwiązania to rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego (1) jest suma rozwiązań (3) odpowiednio dla $r = r_1$ oraz $r = r_2$:

$$\varphi = A_1 e^{(-\beta - i\omega_t)t} + A_2 e^{(-\beta + i\omega_t)t} \quad (8)$$

Po zredukowaniu można zapisać:

$$\varphi = e^{-\beta t} (A_1 \sin(\omega_t t) + A_2 \cos(\omega_t t)) \quad (9)$$

Stałe A_1 i A_2 wyznaczymy z warunków początkowych. Musimy mieć jednak równanie prędkości, które otrzymamy po zrózniczkowaniu równania (9)

$$\dot{\varphi} = -\beta e^{-\beta t} (A_1 \sin(\omega_t t) + A_2 \cos(\omega_t t)) + e^{-\beta t} (A_1 \omega_t \cos(\omega_t t) - A_2 \omega_t \sin(\omega_t t)) \quad (10)$$

Podstawmy warunki początkowe $\varphi(0) = \frac{\pi}{36}$ i $\dot{\varphi}(0) = 0$ do równań (9) i (10).

$$\frac{\pi}{36} = A_2 \quad (11)$$

$$0 = -\beta A_2 + A_1 \omega_t \quad (12)$$

Stąd:

$$A_1 = \frac{\beta}{\omega_t} \frac{\pi}{36} \quad (13)$$

$$A_2 = \frac{\pi}{36} \quad (14)$$

Stąd ostatecznie rozwiązanie w postaci:

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{36} e^{-\beta t} \left(\frac{\beta}{\omega_t} \sin(\omega_t t) + \cos(\omega_t t) \right) \quad (15)$$

Liczba tłumienia ξ :

Liczba tłumienia (bezwymiarowy współczynnik tłumienia) ξ (czyt. ksi) dla drgań podkrytycznych zawiera się w przedziale $0 < \xi < 1$. W przypadku wartości 1 mówimy o tłumieniu krytycznym, a gdy przyjmuje wartość 0 to mamy do czynienia z drganiami nietłumionymi. Wartości powyżej 1 oznaczają drgania nadkrytyczne. Wyznaczamy ją ze wzoru:

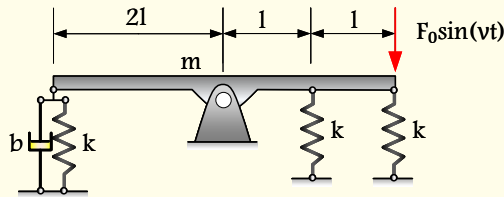
$$\xi = \frac{\beta}{\omega_0} \quad (16)$$

$$\xi = \frac{b}{8m} \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{b}{8\sqrt{km}} \approx 0,011 \quad (17)$$

Wartość ξ nieprzekraczająca 0,02 uznawana jest za słabe tłumienie.

Przykład drgań wymuszonych:

Wyznacz ogólne równanie ruchu oraz charakterystyki amplitudowo-częstotliwościową oraz fazowo-częstotliwościową układu tłumionego pokazanego na rysunku wymuszanego siłą harmoniczną. Przyjmij zerowe warunki początkowe tj. $\varphi(0) = \dot{\varphi} = 0$.



Dane:

$$m = 2 \text{ kg}$$

$$k = 6000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$b = 10 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$$

$$l = 1 \text{ m}$$

$$F_0 = 20 \text{ N}$$

Szukane: $\varphi(t), |B(\nu)|, \phi(\nu)$

Rozwiązanie:

Na początku należy wyznaczyć różniczkowe równanie ruchu układu (model matematyczny). Korzystając z równania Lagrange'a II rodzaju, równanie będzie miało postać:

$$J\ddot{\varphi} + 4bl^2\dot{\varphi} + 9kl^2\varphi = 2F_0l \sin(\nu t) \quad (18)$$

gdzie: $J = \frac{4}{3}ml^2$. Dzieląc obustronnie równanie przez J otrzymamy:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = f_0 \sin(\nu t) \quad (19)$$

gdzie:

$\beta = \frac{3}{2}\frac{b}{m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{27}{4}\frac{k}{m}}$, $f_0 = \frac{3}{2}\frac{Fl}{m}$. Całką ogólną równania niejednorodnego jest suma całki ogólnej równania jednorodnego i całki szczególnej równania niejednorodnego.

$$\varphi(t) = \varphi_o(t) + \varphi_s(t) \quad (20)$$

Całkę ogólną równania jednorodnego φ_o rozwiązujemy tak jak w poprzednim przykładzie i rozwiązaniem będzie równanie (9). Całkę szczególną natomiast rozwiązujemy metodą przewidywań. Poszukujemy rozwiązania w postaci trygonometrycznej:

$$\varphi_s(t) = B \sin(\nu t) + C \cos(\nu t) \quad (21)$$

lub w postaci zespolonej:

$$\tilde{\varphi}_s(t) = B e^{i\nu t} \quad (22)$$

Decydujemy się na podejście z funkcją zespoloną. Zastosowanie funkcji zespolonej ma wiele korzyści. Przede wszystkim jest prostsze w zapisie, zwłaszcza podczas różniczkowania. Przed podstawieniem rozwiązania szczególnego do równania niejednorodnego (19) wyrażmy prawą stronę równania $f_0 \sin(\nu t)$ jako funkcję $f_0 e^{i\nu t}$.

$$\ddot{\tilde{\varphi}}_s + 2\beta\dot{\tilde{\varphi}}_s + \omega_0^2\tilde{\varphi}_s = f_0 e^{i\nu t} \quad (23)$$

Czytający z uwagą słusznie mogą zaprotestować, że takie podstawienie jest bezprawne, bowiem funkcje te nie są tożsamościowe, gdyż

$$e^{i\nu t} = \cos(\nu t) + i \sin(\nu t) \neq \sin(\nu t) \quad (24)$$

Przymknijmy na chwile na to oko. Naprawimy swój błąd później. (*Tak robią fizycy, matematyków przepraszamy*). Zróżniczkujmy dwukrotnie proponowane rozwiązanie szczególne (22):

$$\ddot{\varphi}_s(t) = \ddot{B}e^{i\nu t}, \quad \dot{\varphi}_s(t) = i\dot{B}\nu e^{i\nu t}, \quad \ddot{\varphi}_s(t) = -\ddot{B}\nu e^{i\nu t}$$

i podstawmy do równania (23)

$$-\ddot{B}\nu^2 e^{i\nu t} + i2\beta\dot{B}\nu e^{i\nu t} + \omega_0^2 \ddot{B}e^{i\nu t} = f_0 e^{i\nu t} \quad (25)$$

$$(-\nu^2 + i2\beta + \omega_0^2) \ddot{B} = f_0 \quad (26)$$

Stąd możemy wyznaczyć zespoloną amplitudę $\ddot{B}$ w postaci kanonicznej:

$$\ddot{B}(\nu) = \frac{f_0}{-\nu^2 + i2\beta\nu + \omega_0^2} \quad (27)$$

Amplitudą jest liczba zespolona, z której możemy wyodrębnić część rzeczywistą i urojoną poprzez pomnożenie licznika i mianownika przez sprzężenie mianownika.

$$\ddot{B}(\nu) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \nu^2 + i2\beta\nu} \cdot \frac{\omega_0^2 - \nu^2 - i2\beta\nu}{\omega_0^2 - \nu^2 - i2\beta\nu} = \frac{f_0 (\omega_0^2 - \nu^2)}{(\omega_0^2 - \nu^2)^2 + 4\beta^2\nu^2} - i \frac{2f_0\beta\nu}{(\omega_0^2 - \nu^2)^2 + 4\beta^2\nu^2} \quad (28)$$

Dla uproszczenia zapisu przyjmijmy funkcję $\gamma(\nu)$ jak poniżej:

$$\gamma(\nu) = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \nu^2)^2 + 4\beta^2\nu^2} \quad (29)$$

Część rzeczywistą i urojoną amplitudy (28) zapiszemy wówczas:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\ddot{B}) &= (\omega_0^2 - \nu^2)\gamma(\nu) \\ \operatorname{Im}(\ddot{B}) &= -2\beta\nu\gamma(\nu) \end{aligned} \quad (30)$$

Amplitudę zespoloną (28) po zastosowaniu podstawienia (29) możemy przedstawić w postaci algebraicznej (kanonicznej):

$$\ddot{B}(\nu) = (\omega_0^2 - \nu^2)\gamma - i2\beta\nu\gamma \quad (31)$$

lub w postaci trygonometrycznej:

$$\ddot{B}(\nu) = |B| e^{i\phi} \quad (32)$$

gdzie:

$$\phi = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(\ddot{B})}{\operatorname{Re}(\ddot{B})}\right) = \arctan\left(-\frac{\omega_0^2 - \nu^2}{2\beta\nu}\right) \quad (33)$$

$$|B| = \sqrt{\operatorname{Re}(\ddot{B})^2 + \operatorname{Im}(\ddot{B})^2} = \gamma(\nu) \sqrt{(\omega_0^2 - \nu^2)^2 + 4\beta^2\nu^2} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \nu^2)^2 + 4\beta^2\nu^2}} \quad (34)$$

Moduł amplitudy $|B|$ można także policzyć jako moduł zespolonej amplitudy (27) korzystając z własności, że moduł ilorazu liczb zespolonych jest ilorazem modułów liczb zespolonych tj.

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}:$$

$$|B| = \frac{|f_0|}{|\omega_0^2 - \nu^2 + i2\beta\nu|} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \nu^2)^2 + 4\beta^2\nu^2}} \quad (35)$$

Skoro znamy amplitudę drgań, to podstawmy ją w postaci trygonometrycznej (32) do rozwiązania szczególnego (22):

$$\tilde{\varphi}_s(t) = |B|e^{i\phi}e^{i\nu t} = |B|e^{i(\nu t + \phi)} \quad (36)$$

W tym momencie naprawimy nasz błąd. Skoro wymuszeniem była tylko część urojona naszego wymuszenia zespolonego $e^{i\nu t}$, to interesuje nas tylko urojona część rozwiązania zespolonego, a więc ostatecznie rozwiązaniem szczególnym będzie:

$$\varphi_s(t) = |B| \sin(\nu t + \phi) \quad (37)$$

Warto zauważyć, że kąt ϕ przyjmie wartość ujemną, co wynika z równania (33). Oznacza to, że odpowiedź układu będzie opóźniona w fazie w stosunku do wymuszenia. Ostatecznie, zapiszmy całkę ogólną równania niejednorodnego zgodnie z (20) podstawiając równania za całkę ogólną równania jednorodnego funkcję (9) a za całkę szczególną równania niejednorodnego funkcję (37).

$$\varphi(t) = e^{-\beta t} (A_1 \sin(\omega_t t) + A_2 \cos(\omega_t t)) + |B| \sin(\nu t + \phi) \quad (38)$$

Stałe A_1 i A_2 wyznaczymy z warunków początkowych. Potrzebujemy jednak równania prędkości kątowej, które uzyskamy różniczkując (38).

$$\dot{\varphi}(t) = -\beta e^{-\beta t} (A_1 \sin(\omega_t t) + A_2 \cos(\omega_t t)) + e^{-\beta t} (A_1 \omega_t \cos(\omega_t t) - A_2 \omega_t \sin(\omega_t t)) + |B| \nu \cos(\nu t + \phi) \quad (39)$$

Podstawiając zerowe warunki początkowe do powyższych równań otrzymujemy układ równań.

$$\begin{cases} 0 &= A_2 \\ 0 &= -\beta A_2 + A_1 \omega_t + |B| \nu \end{cases} \quad (40)$$

Dzięki czemu otrzymujemy amplitudy:

$$\begin{cases} A_1 &= \frac{|B| \nu}{\omega_t} \\ A_2 &= 0 \end{cases} \quad (41)$$

Warto zwrócić uwagę, że mimo zerowych warunków początkowych stałe A_1 i A_2 wcale nie muszą być równe 0. Ostateczne rozwiązanie po podstawieniu stałych:

$$\varphi(t) = \underbrace{\frac{|B| \nu}{\omega_t} e^{-\beta t} \sin(\omega_t t)}_{\text{drgania własne}} + \underbrace{|B| \sin(\nu t + \phi)}_{\text{drgania wymuszone}} \quad (42)$$

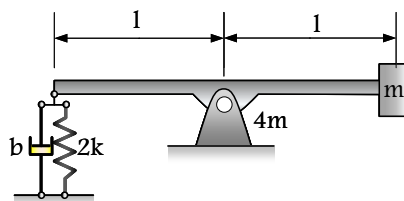
Warto wspomnieć, że przy analizie drgań wymuszonych często pomijamy drgania własne, ponieważ po pewnym czasie ich skutek zanika. Dla $t \rightarrow \infty$ w rozwiązaniu pozostanie tylko odpowiedź układu na wymuszenie (rozwiązanie szczególne).

1 Zadanie

Wyznacz równanie ruchu belki wspartej układem sprężysto-tłumiącym, określ częstość drgań tłumionych oraz liczbę tłumienia. Przyjmij warunki początkowe: $\varphi(0) = \phi_0, \dot{\varphi}(0) = 0$

Dane: m, k, b, l

Szukane: $\omega_t, \xi, \varphi(t)$

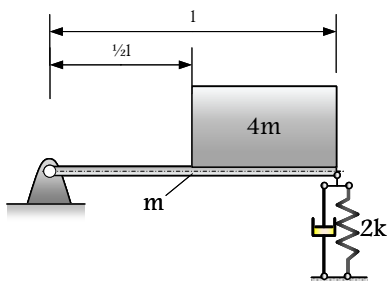


2 Zadanie

Wyznacz równanie ruchu belki wraz z ładunkiem o masie $4m$ wspartej układem sprężysto-tłumiącym, określ częstotść drgań tłumionych oraz liczbę tłumienia. $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = \Omega_0$

Dane: m, k, b, l

Szukane: $\omega_t, \xi, \varphi(t)$



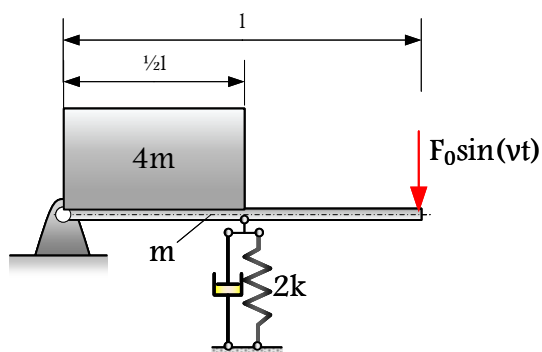
3 Zadanie

Wyznacz ogólne równanie ruchu belki obciążonej ładunkiem o masie $4m$ pobudzanej na końcu siłą harmoniczną. Wyznacz ponadto charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe oraz fazowo-częstotliwościowe. Przyjmij niewielkie drgania oraz następujące warunki początkowe $\varphi(0) = \frac{\pi i}{12}, \dot{\varphi}(0) = v_0$

Dane: m, k, b, F_0, l, ν

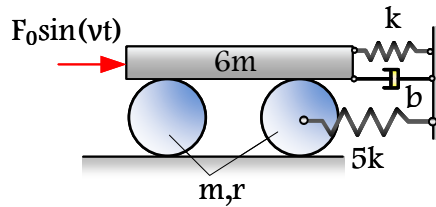
Szukane: $\varphi(t),$

charakterystyki: $A(\nu), \phi(\nu)$



4 Zadanie

Wyznacz ogólne równanie ruchu płyty o masie $6m$ położonej na dwóch krążkach o masach m , pobudzonej siłą harmoniczną. Wyznacz charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe oraz fazowo-częstotliwościowe. Przyjmij toczenie bez poślizgu oraz następujące warunki początkowe $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0$



Dane: m, k, b, F_0, r, ν

Szukane: $x(t)$,

charakterystyki: $A(\nu), \phi(\nu)$