
Równania Lagrange'a II rodzaju

część 2

dr inż. Sebastian Pakuła

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

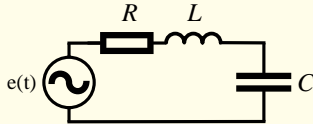
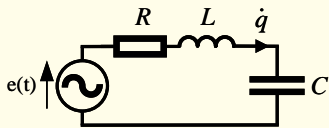
e-mail: spakula@agh.edu.pl
<http://home.agh.edu.pl/~spakula/>

Przykład:

Wyprowadź różniczkowe równanie przebiegu prądu w obwodzie szeregowym RLC stosując równania Lagrange'a II rodzaju.

Dane: $R, L, C, J_1, J_2, d_1, d_2, M, k_e, k_m$

Szukane: różniczkowe równanie

**Rozwiązanie:**

Oznaczam współrzędne opisujące przebiegi prądów w poszczególnych gałęziach układu elektrycznego. W tym wypadku użyję jednej współrzędnej q określających ładunek elektryczny. Pochodna ładunku $\dot{q} = i(t)$ to natężenie prądu elektrycznego.

Ustalam także kierunek siły elektromotorycznej $e(t)$ zgodnie z kierunkiem prądu, którego przepływ wymusza. Nie jest istotne, że siła jest zmienna, określam układ współrzędnych.

Definiuję **energie kinetyczną**:

$$E = \frac{1}{2}L\dot{q}^2$$

Energia potencjalna:

$$U = \frac{1}{2}\frac{1}{C}q^2$$

Funkcja dyssypacji energii:

$$D = \frac{1}{2}R\dot{q}^2$$

Pracę wirtualną w układach elektrycznych wykonują siły pola elektrycznego (siły elektromotoryczne) na przesunięciu ładunku elektrycznego δq . W związku z tym:

$$\delta W = e(t)\delta q$$

stąd siłą uogólnioną jest wszystko to co wykonuje pracę na przemieszczeniu przygotowanym (wirtualnym) we współrzędnej uogólnionej q . Tak więc:

$$Q = e(t)$$

Następnie obliczamy pochodne zgodne z równaniami Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right) = L\ddot{q} \quad \frac{\partial E}{\partial q} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial q} = \frac{1}{C}q \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = R\dot{q}$$

Ostatecznie równania Lagrange'a II rodzaju dla obwodu RLC przedstawiają się następująco:

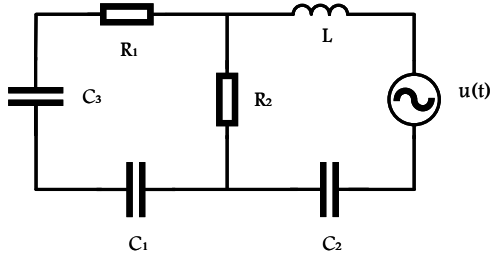
$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = e(t)$$

1 Zadanie

Wyznacz różniczkowe równania układu elektronicznego przedstawionego na rysunku zasilanego źródłem napięcia przemiennego $u(t)$.

Dane: $R_1, R_2, C_1, C_2, C_3, L, u(t)$

Szukane: różniczkowe równania

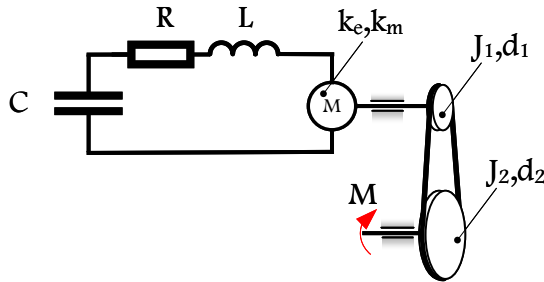


2 Zadanie

Wyznacz różniczkowe równania przebiegu prądów w obwodzie RLC prądu przemiennego napędzanej stałym momentem napędowym M poprzez zespół przekładni.

Dane: $R, L, C, J_1, J_2, d_1, d_2, M, k_e, k_m$

Szukane: różniczkowe równanie ruchu



k_e - stała elektryczna silnika

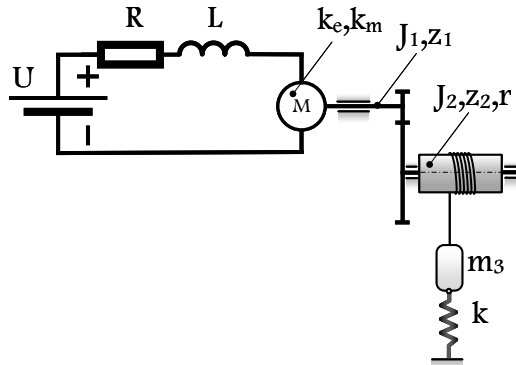
k_m - stała mechaniczna silnika

$$U_{SEM} = k_e \cdot \dot{\varphi}$$

$$M_e = k_m \cdot \dot{q}$$

3 Zadanie

Wyznacz różniczkowe równania układu podnoszenia szyby samochodowej za pomocą przekładni zębatej napędzanej silnikiem prądu stałego.



Dane: $R, L, C, m_1, J_1, J_2, z_1, z_2, U, k_e, k_m$

Szukane: różniczkowe równanie ruchu

k_e - stała elektryczna silnika

k_m - stała mechaniczna silnika

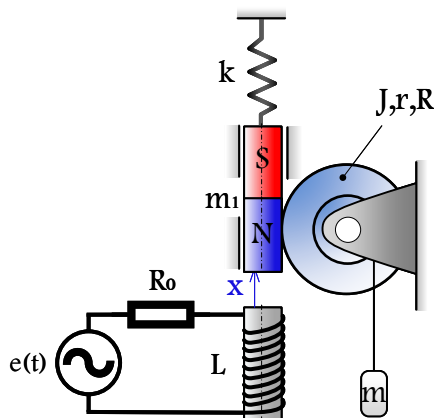
z_1, z_2 - liczba zębów kół przekładni

$$U_{SEM} = k_e \cdot \dot{\varphi}$$

$$M_e = k_m \cdot \dot{q}$$

4 Zadanie

Magnes o masie m_1 zaczepiono na sprężynie o sztywności k przyłożono w okolice cewki o indukcyjności L . Ruch magnesu jest sprzężony z ruchem zewnętrznej powierzchni bębna o momencie bezwładności J i o promieniach r i R . Na wewnętrznym promieniu zawieszona jest masa m na nierozciągliwej linie. Wyznacz różniczkowe równania układu elektromagnesu zasilanego źródłem napięcia przemiennego $e(t)$.



Dane: $R_0, L, e(t), m_1, m, k, J, r, R, k_m$

Szukane: różniczkowe równanie ruchu

$$F = k \frac{i}{x^2} - \text{siła oddziaływania cewki na magnes}$$

k_m - stała magnetyczna