

---

# Równania Lagrange'a II rodzaju

## część 2

---

dr inż. Sebastian Pakuła

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

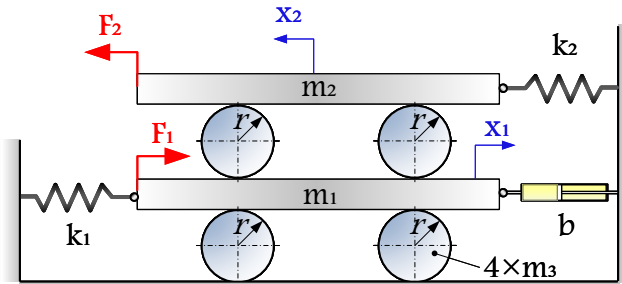
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

e-mail: [spakula@agh.edu.pl](mailto:spakula@agh.edu.pl)  
<http://home.agh.edu.pl/~spakula/>

## 1 Zadanie

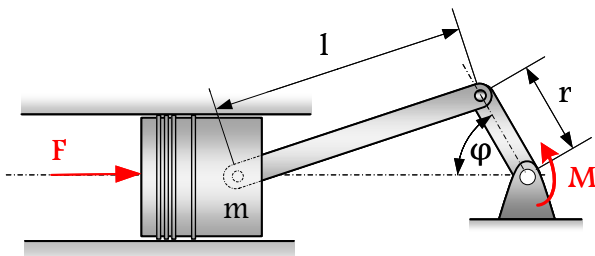
Dwie płyty o masach  $m_1$  i  $m_2$  spoczywają na jednakowych rolkach o masach  $m_3$  i promieniu  $r$ . Na płyty te oddziałują przeciwstawne siły, odpowiednio  $F_1$  oraz  $F_2$ . Wyznacz różniczkowe równania ruchu tego układu posługując się równaniami Lagrange'a II rodzaju. Toczenie rolek odbywa się bez poślizgu.



$$\text{Odp. } \begin{cases} \ddot{x}_1 \left( \frac{2}{3}m_3 + m_1 \right) - \frac{1}{4}m_3\ddot{x}_2 + k_1x_1 + b\dot{x}_1 = F_1 \\ \ddot{x}_2 \left( m_2 + \frac{3}{4}m_3 \right) - \frac{1}{4}\ddot{x}_1 + k_2x_2 = F_2 \end{cases}$$

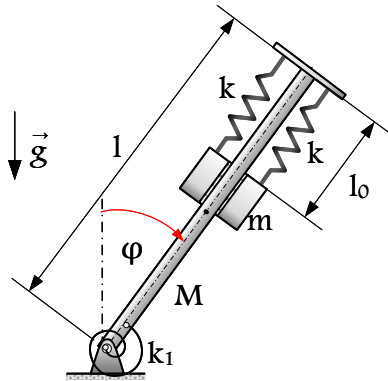
## 2 Zadanie

Wyznacz równanie różniczkowe ruchu tłoka w cylindrze, który napędzany jest wał korbowy momentem siły  $M$ . Długość wykorbienia to  $r$ , długość korbowodu  $l$ , a masa tłoka wynosi  $m$ . Przyjmij, że korba i korbowód są nieważkie.



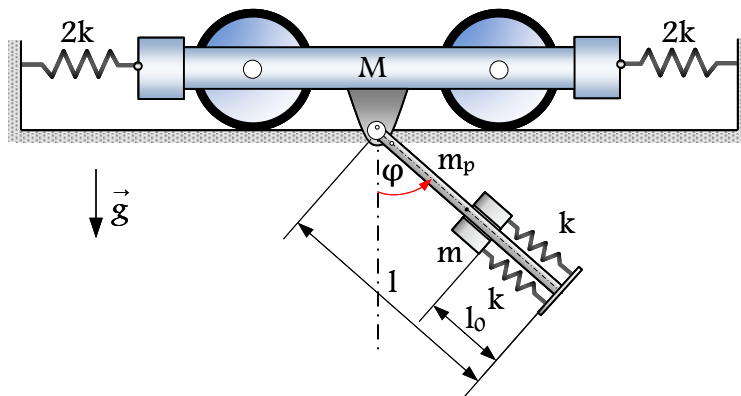
### 3 Zadanie

Pręt o masie  $M$  i długości  $l$  zamocowano przegubowo i wsparto sprężyną skrętną o sztywności  $k_1 [Nm/rad]$ . Na pręt nałożono tuleję o masie  $m$  i zaczepiono do dwóch jednakowych sprężyn o sztywności  $k$ , których koniec zamocowano do końca pręta. Wyznacz różniczkowe równania ruchu takiego układu, stosując równania Lagrange II rodzaju. Sprężyna skrętna jest nieodkształcona dla pionowego położenia pręta, a długość swobodna sprężyny śrubowej wynosi  $l_0$ .



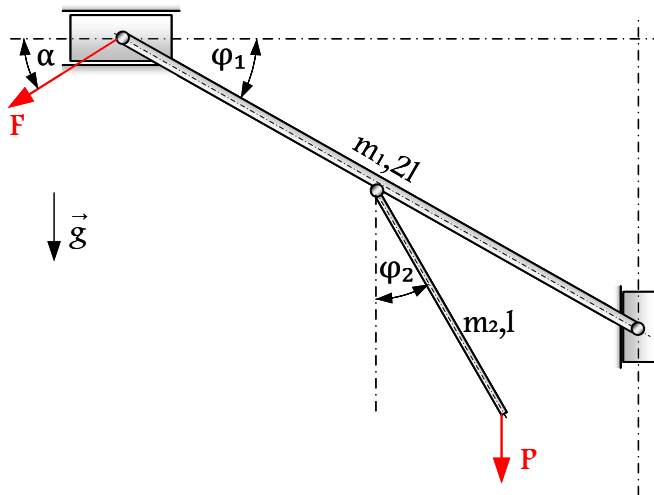
### 4 Zadanie

Wyznacz różniczkowe równania ruchu wahadła (takiego jak w zadaniu poprzednim) przymocowanego do wózka jeźdźnego wspartego dwiema sprężynami.



## 5 Zadanie

Pręt o masie  $m_1$  i długości  $2l$  zamocowano końcami do suwaków mogących się poruszać w kierunkach odpowiednio poziomym i pionowym. Drugi pręt o masie  $m_2$  i długości  $l$  zamocowano przegubowo w środku pręta pierwszego. Na koniec drugiego pręta oddziałuje siła pionowa  $P$ , natomiast na suwak poruszający się poziomo jest poddany sile  $F$  pod kątem  $\alpha$  do poziomu. Wyznacz różniczkowe równanie ruchu przedstawionego układu.



$$\text{Odp. } \left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{3}m_1l^2\ddot{\varphi}_1 + m_2l^2\ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2}m_2l^2[\ddot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1\varphi_2) + \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)] + \\ \quad - \frac{1}{2}m_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2l^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - (m_1 + m_2)gl \cos \varphi_1 = Pl \cos \varphi_1 - 2F \cos \alpha \sin \varphi_1 \\ \frac{1}{3}m_2l^2\ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2}m_2l^2(\ddot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)) + \\ \quad + \frac{1}{2}m_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2l^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}m_2gl \sin \varphi_2 = -Pl \sin \varphi_2 \end{array} \right.$$