Równania Lagrange'a II rodzaju

część 1

dr inż. Sebastian Pakuła

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

e-mail: spakula@agh.edu.pl
http://home.agh.edu.pl/~spakula/

Wprowadzenie

Równania Lagrange'a II rodzaju:

Gdy rozpatrywany jest układ punktów materialnych o więzach holonomicznych, równanie Lagrange'a I rodzaju można przedstawić wg następującego wzoru:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \tag{1}$$

gdzie:

- $L = E - U$ - współrzędne wyjściowe
- $\dot{q}, q$ - prędkość i współrzędna uogólniona
- E - energia kinetyczna (np. $E = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{J\dot{\varphi}^2}{2}$)
- U - energia potencjalna (np. $U = \frac{1}{2}kq^2 + mgq$)
- D - funkcja dyssypacji energii (np. $D = \frac{1}{2}b\dot{q}^2$)

Korzystając z własności, że energia potencjalna nigdy nie zależy od prędkości uogólnionej (tj. $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}} = 0$), równanie Lagrange'a można zapisać także w innej (wygodniejszej do obliczeń) postaci.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \tag{2}$$

Siły uogólnione otrzymujemy z równania pracy wirtualnej:

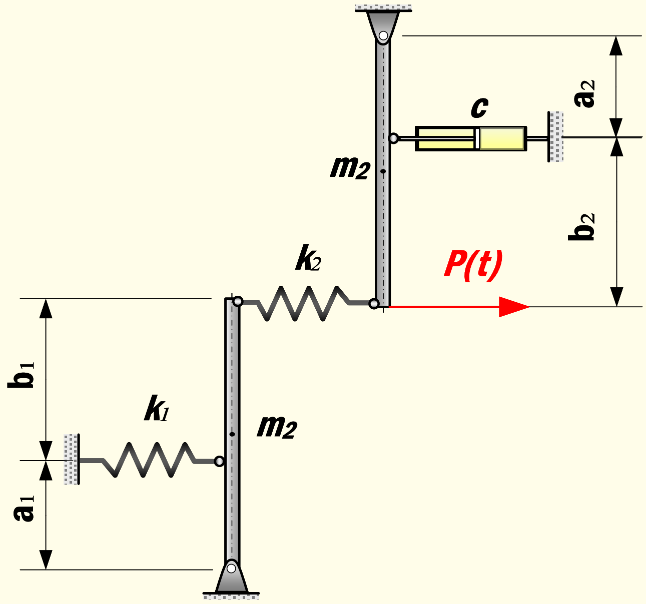
$$\delta W = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 \tag{3}$$

Siłą uogólniona więc nazywamy wszystko to co wykonuje pracę na przesunięciu przygotowanym wyrażonym we współrzędnej uogólnionej.

Przykład 1:

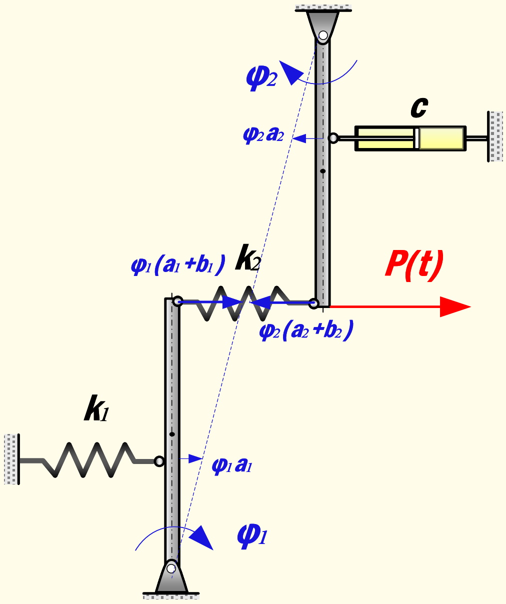
Wyznacz różniczkowe równania ruchu przedstawionego układu, korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju.

Dane:
$m_1, m_2, k_1, k_2, c, a_1, b_1, a_2, b_2$



Rozwiązanie:

Zajmijmy się najpierw kinematyką. Oznaczmy układy współrzędnych opisujących ruch poszczególnych brył w układzie. W tym wypadku mamy dwie bryły (pręty) poruszające się ruchem obrotowym. Wprowadźmy współrzędne φ_1 oraz φ_2 oraz odpowiednie przemieszczenia liniowe.



Momenty bezwładności:

$$J_1 = \frac{1}{3}m_1(a_1 + b_1)^2$$

$$J_2 = \frac{1}{3}m_2(a_2 + b_2)^2$$

Równania więzów: brak

Współrzędne uogólnione:

$s = 2$ - stopnie swobody

$q = \{\varphi_1, \varphi_2\}$

Zapiszmy równania energii.

Energia kinetyczna E:

$$E = \frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2 \tag{4}$$

Energia potencjalna U:

$$U = \frac{1}{2}k_1(\varphi_1 a_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(\varphi_1(a_1 + b_1) + \varphi_2(a_2 + b_2))^2 \tag{5}$$

Uwaga! Energia potencjalna sprężystości zależy od kwadratu odkształcenia sprężyny. W tym wypadku odkształcenie sprężyny k_2 składa się z sumy przemieszczeń obydwu końców. Jeśli założymy niewielkie obroty prętów (bo sprężyny są zwykle sztywne), to możemy zaniedbać energie pola grawitacyjnego.

Funkcja dyssypacji energii D:

$$D = \frac{1}{2}c(\dot{\varphi}_2 a_2)^2 \tag{6}$$

Siła uogólniona Q:

Aby wyznaczyć siły uogólnione musimy najpierw zapisać równanie pracy wirtualnej od sił niepotencjalnych (te które nie mają pola potencjalnego tj. siły grawitacji i sprężystości). W pracy wirtualnej także nie uwzględniamy tutaj siły tłumienia, gdyż jej praca jest już ujęta w funkcji dyssypacji energii D.

$$\delta W = P(t)(a_2 + b_2)\delta\varphi_2 + 0\delta\varphi_1 \rightarrow Q_1 = 0, Q_2 = P(t)(a_2 + b_2) \tag{7}$$

Zobacz (3).

Pochodne:

Od razu wykonujemy pochodne po obu współrzędnych (i prędkościach) uogólnionych.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \dot\varphi_1} &= J_1\dot\varphi_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot\varphi_1}\right) &= J_1\ddot\varphi_1 \\ \frac{\partial E}{\partial \varphi_1} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} &= k_1 a_1^2\varphi_1 + k_2\left(\varphi_1(a_1+b_1)+\right. \\ &\left.+\varphi_2(a_2+b_2)\right)(a_1+b_1) \\ \frac{\partial D}{\partial \dot\varphi_1} &= 0 \end{aligned}$$

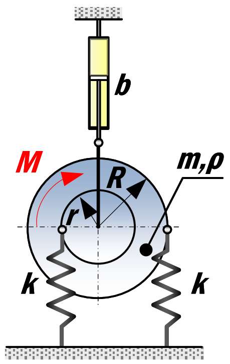
$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \dot\varphi_2} &= J_2\dot\varphi_2 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot\varphi_2}\right) &= J_2\ddot\varphi_2 \\ \frac{\partial E}{\partial \varphi_2} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} &= k_2(a_2+b_2)\left(\varphi_1(a_1+b_1)+\varphi_2(a_2+b_2)\right) \\ \frac{\partial D}{\partial \dot\varphi_2} &= c a_2^2\dot\varphi_2 \end{aligned}$$

Ostatecznie, podstawiając pochodne do wzoru (2), otrzymujemy dwa równania różniczkowe drugiego rzędu sprzężonych ze sobą.

$$\begin{cases} J_1\ddot\varphi_1 + k_1 a_1^2\varphi_1 + k_2\left(\varphi_1(a_1+b_1)+\varphi_2(a_2+b_2)\right)(a_1+b_1) = 0 \\ J_2\ddot\varphi_2 + k_2(a_2+b_2)\left(\varphi_1(a_1+b_1)+\varphi_2(a_2+b_2)\right) + c a_2^2\dot\varphi_2 = P(t)(a_2+b_2) \end{cases} \tag{8}$$

1 Zadanie

Szpulka o masie m, promieniu bezwładności ρ oraz o promieniach odpowiednio r i R, może poruszać się w kierunku pionowym oraz wykonywać niewielkie obroty. Na zewnętrznym i wewnętrznym promieniu szpulki nawinięte są sprężyste cięgna o sztywności k. Wyznacz równania różniczkowe ruchu, tego układu wykorzystując równania Lagrange'a II rodzaju. Przyjmij, że szpulka obciążona jest dodatkowo momentem M.

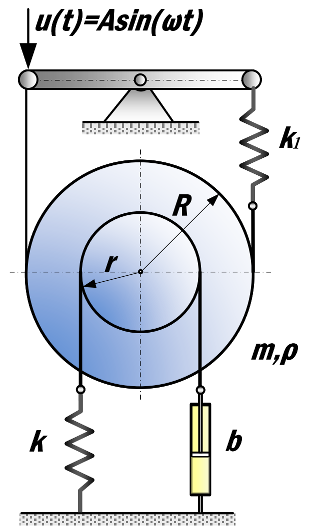


***Podpowiedź*:**

- Założyć niewielkie obroty
- Zaniedbać ruch poziomy

2 Zadanie

Bezmasowa dźwignia, której koniec przemieszcza się wg równania $u(t) = Asin(\omega t)$ wprawia w ruch szpulę o promieniach r i R. Z lewej strony z zewnętrznego promienia odchodzi nierozciągliwe cięgno, natomiast z prawej wiotkie cięgno o sztywności k_1.

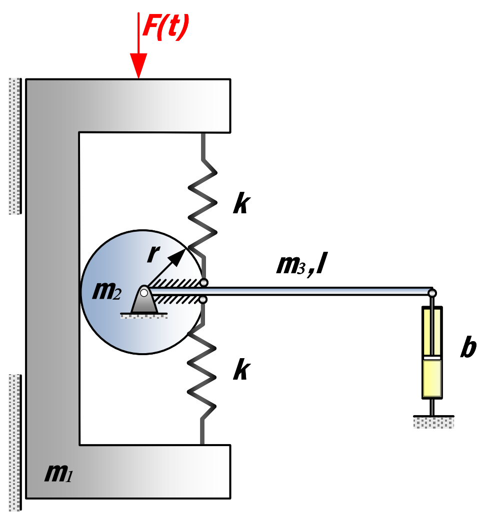


***Podpowiedź*:**

- Założyć niewielkie obroty
- Zaniedbać ruch poziomy
- Nie rozpatrujemy dynamiki dźwigni

3 Zadanie

Na jarzmo o masie m_1 oddziałuje zmienna siła $F(t)$. Jarzmo jest zazębione z krążkiem o masie m_2 i promieniu r. Do krążka przyspawano pręt o masie m_3 i długości l, na końcu którego zamontowano tłumik o współczynniku tłumienia b. Wyznacz równanie ruchu takiego układu.

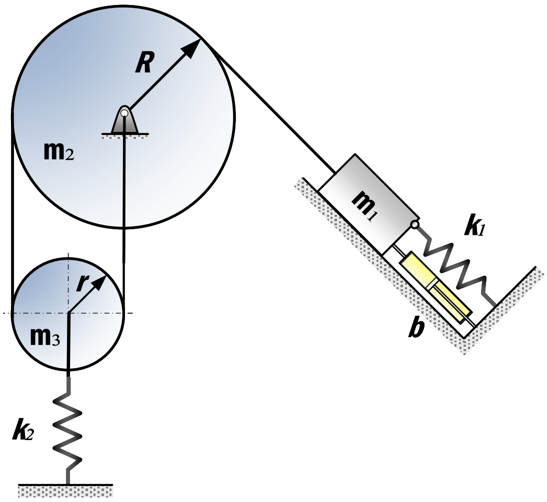


***Podpowiedź*:**

- Założyć niewielkie przemieszczenia
- Końce sprężyn przymocowane są do krążka

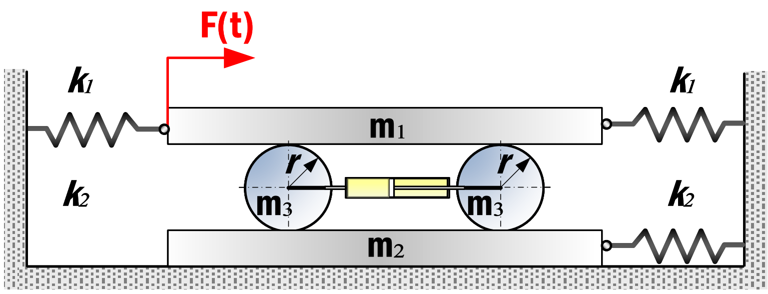
4 Zadanie

Masa m_1 wsparta na równi pochyłej o kącie α, spoczywa na układzie sprężysto-tłumiącym o współczynnikach k_1 i b. Jest ona połączona z układem krążków za pomocą nierozciągliwego i nieważkiego cięgna. Krążek o masie m_3 i promieniu r porusza się ruchem płaskim, a jego środek jest połączony ze sprężyną o sztywności k_2. Wyznacz dynamiczne równanie ruchu tego układu.



5 Zadanie

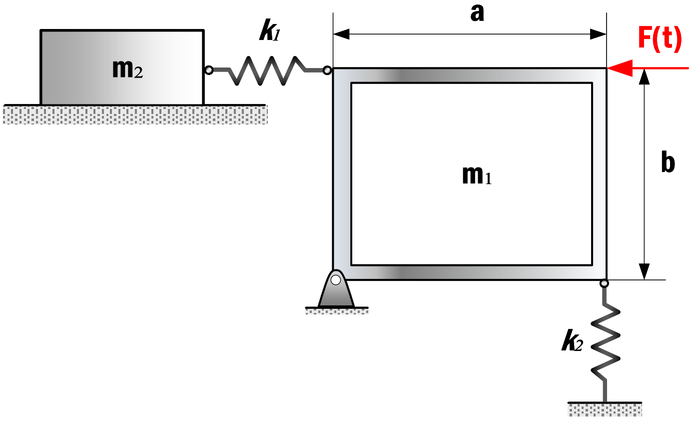
Dwie płyty o masie m_1 i m_2 zamocowane sprężyście do ściany, przemieszczają się równolegle względem siebie za pomocą jednakowych krążków o masie m_3 i promieniu r. Między krążkami zainstalowano tłumik o współczynniku tłumienia b. Wyznacz, dynamiczne równania ruchu tego układu, zakładając, że na górną z płyt oddziałuje zmienna siła $F(t)$. *Tarcie dolnej płyty o podłoże pominąć.*



6 Zadanie

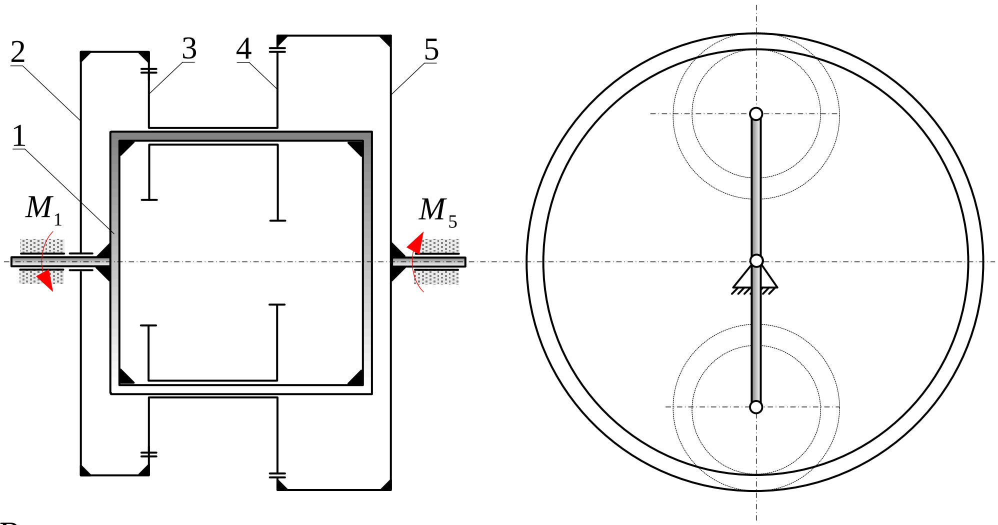
Ramę o masie m_1 i bokach a, b zamocowano przegubowo w jednym z jej narożników. Do górnego rogu ramy za pomocą sprężyny k_1 zamocowano blok o masie m_2. Ramę dodatkowo wsparto sprężyście za pomocą sprężyny k_2 zamocowanej w lewym dolnym rogu ramy. Wyznacz równania ruchu tego układu.

Podpowiedź:
Ramę potraktuj jako połączone belki.



7 Zadanie

Zadanie Domowe: Na rysunku przedstawiono schemat przekładni planetarnej. Wał 1 jest napędzany przy pomocy momentu M_1. Oblicz przyspieszenia wału wejściowego 1 oraz wału wyjściowego 5 jeśli jest on obciążony momentem M_5.



Dane:

$I_1 = 4$	$[kg \cdot m^2]$	$d_2 = 11$	$[cm]$
$I_2 = 15$	$[kg \cdot m^2]$	$d_3 = 4$	$[cm]$
$I_{34} = 7$	$[kg \cdot m^2]$	$d_4 = 6$	$[cm]$
$I_5 = 25$	$[kg \cdot m^2]$	$d_5 = 13$	$[cm]$
$m_{34} = 10$	$[kg]$		
$M_1 = 800$	$[N \cdot m]$		
$M_5 = 20$	$[N \cdot m]$		