Równania Lagrange'a I rodzaju

dr inż. Sebastian Pakuła

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

e-mail: spakula@agh.edu.pl
http://home.agh.edu.pl/~spakula/

Wprowadzenie

Równania Lagrange'a I rodzaju:

Gdy rozpatrywany jest układ punktów materialnych o więzach holonomicznych, równanie Lagrange'a I rodzaju można przedstawić wg następującego wzoru:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\Sigma\vec{F}+\vec{B}+\sum_{j}^{k}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial q_i}\right)\cdot\delta\vec{q_i}=0 \tag{1}$$

gdzie: $\mathbf{q}=\{q_1,q_2,...,q_n\}$ - współrzędne wyjściowe.
Równanie to wygląda podobnie do równania d'Alemberta, jednak dodajemy tutaj czynniki (z λ_i) związane z występowaniem k więzów (f) pomiędzy n współrzędnymi wyjściowymi (opisujących ruch punktów materialnych w lokalnych układach współrzędnych). W odróżnieniu jednak od równań d'Alemberta, nie będziemy redukowali zapisu do s niezależnych równań. Będziemy za to rozpatrywać n równań (czyli więcej) wynikających z przyrównania wyrażeń wykonujących pracę na przesunięciach przygotowanych $\delta\vec{q_i}$ do zera. Wówczas i-te równanie przyjmuje postać:

$$\Sigma F_i+B_i=-\sum_{j}^{k}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial q_i} \tag{2}$$

gdzie: F_i - i-ta składowa siły zewnętrznej, $\vec{B_i}=-m_i\ddot{q_i}$ - i-ta składowa siły bezwładności. Ostatecznie równanie Lagrange'a I rodzaju można przestawić w następującej formie:

$$m_i\ddot{q_i}=\Sigma F_i+\sum_{j}^{k}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial q_i} \tag{3}$$

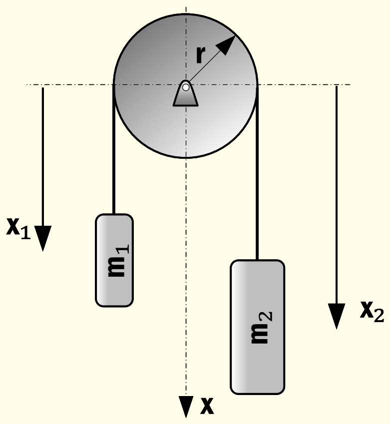
Obliczając k współczynników Lagrange'a λ_j (dla $j=0,1,...,k$) możemy wyznaczyć oddziaływania sił reakcji na konkretny "i-ty" ruch.

$$R_i=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial q_i} \tag{4}$$

Przykład 1:

Dwa punkty połączone są nierozciągliwą nicią o długości l przeciągniętą przez gładki bezmasowy krążek. Wyznacz wartości sił reakcji więzów. Zastosuj równania Lagrange'a I rodzaju.

Dane: m_1, m_2, g, l



Rozwiązanie:

Wektorem współrzędnych opisujących jest położenie punktów materialnych w układzie jest $\mathbf{q} = x_1, x_2$ Zacznijmy od zapisania równania więzu. Linka ma stałą długość, zatem możemy zapisać:

$$f_1 = x_1 + x_2 - l = 0 \tag{5}$$

Reakcje więzów wyznaczymy z zależności (4).

$$\begin{aligned} R_1 &= \lambda_1 \tfrac{\partial f_1}{\partial x_1} = \lambda_1 \\ R_2 &= \lambda_1 \tfrac{\partial f_1}{\partial x_2} = \lambda_1 \end{aligned} \tag{6}$$

Reakcje w obu linkach są więc jednakowe, co jest zgodne z naszą intuicją, skoro krążek jest bezmesowy (wypadkowy moment sił oddziałujących na krążek względem jego osi powinien być równy 0). W celu wyznaczenia mnożnika Lagrange'a, napiszemy równania Lagrange'a I rodzaju wg (3):

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = m_1 g + \lambda_1 \tfrac{\partial f_1}{\partial x_1} = m_1 g + \lambda_1 \\ m_2\ddot{x}_2 = m_2 g + \lambda_1 \tfrac{\partial f_1}{\partial x_2} = m_2 g + \lambda_1 \end{cases}$$

Różniczkując dwukrotnie równanie więzów otrzymamy $\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$. Po podstawieniu do powyższego układu równań i odejmując stronami otrzymamy:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(m_1 + m_2) &= (m_1 - m_2)g \\ \ddot{x}_1 &= \tfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \end{aligned}$$

Podstawiając $\ddot{x}_1$ do pierwszego z równań (6) obliczmy λ_1:

$$\lambda_1 = -\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \tag{7}$$

Zatem wartości sił reakcji linek są równe:

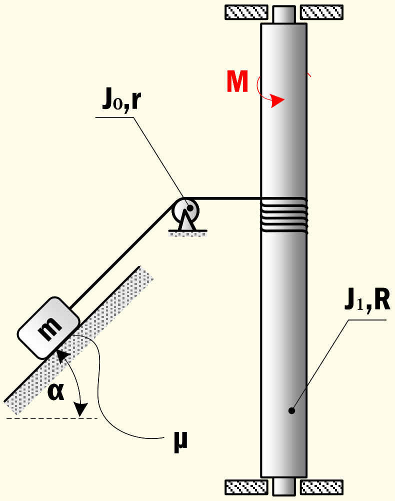
$$R_1 = R_2 = -\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \tag{8}$$

Zauważmy, że gdy masy są jednakowe $m_1 = m_2$, to siła reakcji jest równa ciężarowi $m_1 g$, a zwrot siły jest skierowany przeciwnie do zwrotu osi, odpowiednio x_1 i x_2.

Przykład 2:

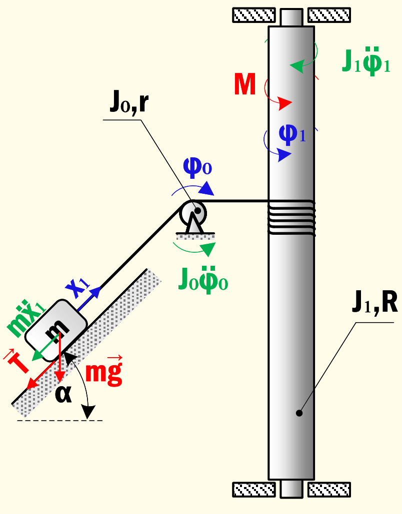
Wyznacz równania ruchu oraz siły reakcji w linkach, korzystając z równań Lagrange'a I rodzaju.

Dane: $m, J_0, J_1, r, R, \alpha, \mu$



Rozwiązanie:

Początkowo postępujemy tak samo jak w równaniach d'Alemberta. Obierzmy układy współrzędnych określających położenie wszystkich brył w układzie. Rozpiszmy siły jakie działają na nasz układ oraz zapiszmy równania więzów.



Siła tarcia:

Wynika z równania sił tarcia Coulomba.

$$T = \mu mg \cos\alpha$$

Równania więzów:

$$\begin{array}{rcl} x_1 &=& \varphi_0 r \quad \rightarrow \ddot{x}_1 = \ddot{\varphi}_0 r \\ \varphi_0 r &=& \varphi_1 R \quad \rightarrow \ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_0 \frac{r}{R} \end{array} \tag{9}$$

Mnożenie przez mnożniki Lagrange'a:

$$\begin{array}{rcl} x_1 - \varphi_0 r &=& 0 \quad /(\cdot\lambda_1) \\ \varphi_0 r - \varphi_1 R &=& 0 \quad /(\cdot\lambda_2) \end{array}$$

Otrzymujemy:

$$\begin{array}{lrcl} f_1: & \lambda_1 x_1 - \lambda_1 r\varphi_0 &=& 0 \\ f_2: & \lambda_2 r\varphi_0 - \lambda_2 R\varphi_1 &=& 0 \end{array}$$

Zapiszmy dla porównania równanie d'Alemberta, uwzględniające pracę wirtualną sił czynnych oraz sił bezwładności. Do sił czynnych zaliczamy tutaj także siłę tarcia.

$$(-m\ddot{x}_1 - T - mg\sin\alpha)\delta x_1 + (M - J_1\ddot{\varphi}_1)\delta\varphi_1 - J_0\ddot{\varphi}_0\delta\varphi_0 = 0 \tag{10}$$

Uwzględniając dodatkowo siły reakcji więzów, równanie Lagrange'a I rodzaju wg (1) będzie wyglądać następująco:

$$(-m\ddot{x}_1 - T - mg\sin\alpha + \lambda_1)\delta x_1 + (M - J_1\ddot{\varphi}_1 - \lambda_2 R)\delta\varphi_1 + (-J_0\ddot{\varphi}_0 - \lambda_1 r + \lambda_2 r)\delta\varphi_0 = 0 \tag{11}$$

Każdy z wyrazów mnożonych przez przesunięcia wirtualne przyrównujemy do zera. W odróżnieniu od równania d'Alemberta, przemieszczenia wirtualne tutaj nie są *niezależne*. Za to wprowadzone mnożniki Lagrange'a w (11) uwzględniają tę zależność i stąd możemy je potraktować jako "*niezależne*". Otrzymujemy finalnie trzy równania:

$$\begin{cases} -m\ddot{x}_1 - T - mg\sin\alpha & = & -\lambda_1 \\ M - J_1\ddot{\varphi}_1 & = & \lambda_2 R \\ -J_0\ddot{\varphi}_0 & = & \lambda_1 r - \lambda_2 r \end{cases} \tag{12}$$

Jest to układ trzech równań z 5 niewiadomymi (wliczając λ_1 oraz λ_2). Uwzględniając dodatkowo dwa równania więzów (9), możemy wyznaczyć wszystkie niewiadome. Podstawmy zatem równania więzów (9) do układu równań (12).

$$\begin{cases} -m\ddot{\varphi}_0 r - T - mg\sin\alpha & = & -\lambda_1 & \\ M - J_1\ddot{\varphi}_0\frac{r}{R} & = & \lambda_2 R & / : R \\ J_0\ddot{\varphi}_0 & = & \lambda_1 r - \lambda_2 r & / : r \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} -m\ddot{\varphi}_0 r - T - mg\sin\alpha & = & -\lambda_1 \\ M\frac{1}{R} - J_1\frac{r}{R^2}\ddot{\varphi}_0 & = & \lambda_2 \\ J_0\frac{1}{r}\ddot{\varphi}_0 & = & \lambda_1 - \lambda_2 \end{cases} \tag{14}$$

Dodajmy następnie wszystkie równania stronami aby wyrugować niewiadome λ_1 oraz λ_2.

$$-m_1\ddot{\varphi}_0 r - T - mg\sin\alpha + M\frac{1}{R} - J_1\frac{r}{R^2}\ddot{\varphi}_0 + J_0\frac{1}{r}\ddot{\varphi}_0 = 0 \tag{15}$$

Po uporządkowaniu

$$\ddot{\varphi}_0 r\left(m + J_1\frac{1}{R^2} - J_0\frac{1}{r^2}\right) = -\mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha + M\frac{1}{R} \tag{16}$$

Ostatecznie obliczamy $\ddot{\varphi}_0$:

$$\ddot{\varphi}_0 = \frac{-\mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha + M\frac{1}{R}}{r\left(m + J_1\frac{1}{R^2} - J_0\frac{1}{r^2}\right)} \tag{17}$$

Pozostałe przyspieszenia możemy wyznaczyć z równań więzów (9), a mnożniki Lagrange'a (λ_1 i λ_2) z układu równań (12).

$$\begin{cases} \lambda_1 & = & m\left(\frac{-\mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha + M\frac{1}{R}}{m + J_1\frac{1}{R^2} - J_0\frac{1}{r^2}} + \mu g\cos\alpha + g\sin\alpha\right) \\ \lambda_2 & = & M\frac{1}{R} - J_1\frac{-\mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha + M\frac{1}{R}}{mR^2 + J_1 - J_0\frac{R^2}{r^2}} \end{cases} \tag{18}$$

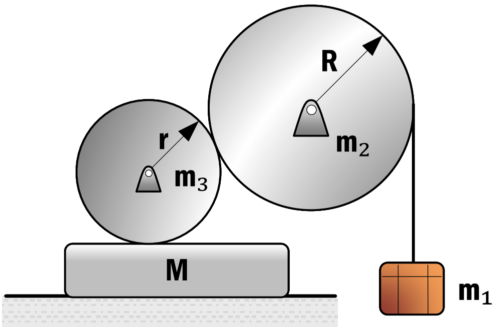
Mając wartości mnożników Lagrange'a, możemy obliczyć wypadkowe wartości sił (lub momentów sił) reakcji więzów (4).

$$\begin{cases} R_1 & = & \lambda_1 \\ R_2 & = & -\lambda_1 r + \lambda_2 r \\ R_3 & = & -\lambda_2 R \end{cases} \tag{19}$$

Pierwsza siła R_1 oznacza siłę naciągu liny ciągnącej ciężarek o masie m. R_2 jest wypadkowym momentem siły od lin po obu stronach krążka. R_3 jest momentem siły naciągu liny oddziałującej na bęben - jest to wartość ujemną ponieważ stanowi obciążenie dla bębna napędzanego momentem M. Ściślej mówiąc, moment reakcji liny jest skierowany przeciwnie do układu współrzędnych φ_1. Warto zwrócić uwagę, że mnożniki Lagrange'a stanowią *tutaj* siłę reakcji więzów tj.: λ_1 - siła napięcia liny ciągnącej masę; λ_2 - siła napięcia liny nawijanej na bęben. Nie jest to jednak regułą.

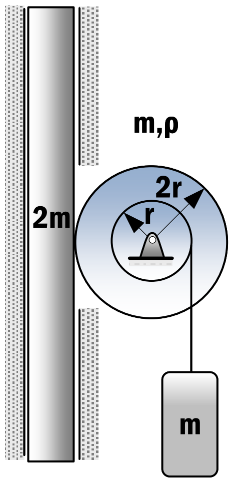
1 Zadanie

Wyznacz przyspieszenie płyty o masie M oraz siły reakcji więzów przy zastosowaniu równań Lagrange'a I rodzaju.



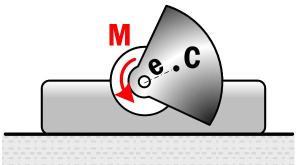
2 Zadanie

Wyznacz przyspieszenie płyty o masie $2m$ połączonej z mechanizmem jak na rysunku. Zastosuj równania Lagrange'a I rodzaju. ρ - promień bezwładności szpuli ($J = m\rho^2$).



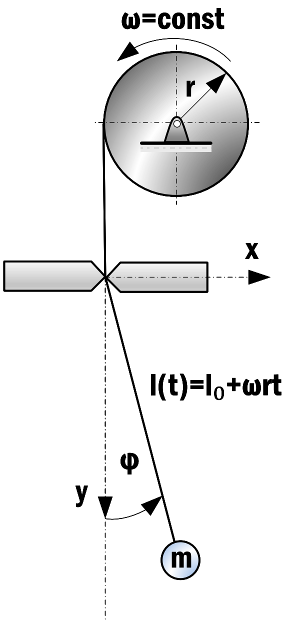
3 Zadanie

Maszyna wibracyjna napędza niewyważony wirnik o masie m ze stałym momentem siły M. Znając centralny moment bezwładności wirnika J oraz promień niewyważenia e, wyznacz składowe sił reakcji oddziałującej na łożysko. Zastosuj równania Lagrange'a I rodzaju.



4 Zadanie

Wahadło zwiększa długość swojego cięgna w sposób jednostajny. Korzystając z równań Lagrange'a I rodzaju, wyznacz wartość siły reakcji liny w funkcji kąta φ.



Odp. $R = m\left(\frac{g}{\cos\varphi} + (2\omega r\dot{\varphi} + l\ddot{\varphi})\operatorname{tg}\varphi + l\dot{\varphi}^2\right)$