Zasada d'Alemberta

dr inż. Sebastian Pakuła

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

e-mail: spakula@agh.edu.pl
http://home.agh.edu.pl/~spakula/

Wprowadzenie

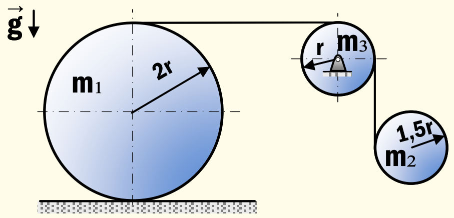
Zasada d'Alemberta:
Zasada d'Alemberta mówi, że suma prac wirtualnych (przygotowanych) sił reakcji więzów działających w układzie jest równa zero. W końcu przemieszczenia wirtualne następują przy "zamrożonych" więzach, więc siły reakcji więzów idealnych nie mogą wykonać pracy nad układem fizycznym. Konsekwencją tego jest równanie d'Alemberta.

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i + \vec{B}_i\right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{1}$$

gdzie: F_i wypadkowa siła oddziałująca na i-ty punkt materialny, $\vec{B}_i = -m_i\ddot{\vec{r}}_i$ - siła bezwładności i-tego punktu materialnego.

Przykład:

Układ krążków połączono jak na poniższym rysunku. Wyznacz równanie ruchu krążka o masie m_1 korzystając z zasady d'Alemberta. W chwili początkowej środek masy m_1 poruszał się z prędkością v_{01}.



Dane:

$m_1 = 2m$

$m_2 = 4m$

$m_3 = m$

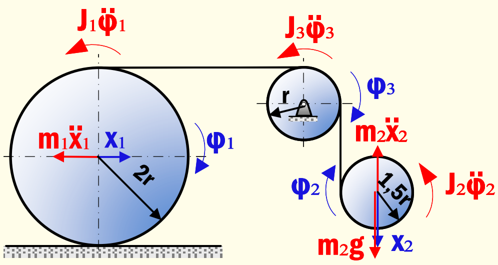
$J_1 = \frac{m_1(2r)^2}{2} = 4mr^2$

$J_2 = \frac{m_2(1{,}5r)^2}{2} = \frac{9}{2}mr^2$

$J_3 = \frac{m_3(r)^2}{2} = \frac{1}{2}mr^2$

Rozwiązanie:

Określmy najpierw układ współrzędnych opisujących położenia poszczególnych brył w układzie. Początki tych układów ustawmy w środkach mas brył w chwili początkowej. Następnie określmy siły jakie działają na bryły w tym układzie, uwzględniając także siły bezwładności. Siły bezwładności wynikają z ruchu przyspieszonego brył i należy uwzględnić je odpowiednio dla "każdego" ruchu. Uwaga! Nie uwalniamy układu od więzów - co jest zaletą tej metody.



Równania więzów:

$$\begin{aligned} \varphi_1 2r &= x_1 \\ x_1 + \varphi_1 2r &= \varphi_3 r \\ \varphi_3 r &= x_2 - \varphi_2 1{,}5r \end{aligned}$$

Bryła ma 2 st. swobody:

$q = \{x_1, x_2\}$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \tfrac{x_1}{2r} \\ \varphi_2 &= \tfrac{x_2-2x_1}{1{,}5r} \\ \varphi_3 &= \tfrac{2x_1}{r} \end{aligned}$$

Zapiszmy pracę przygotowaną układu:

$$-m_1\ddot{x}_1\delta x_1 - J_1\ddot{\varphi}_1\delta\varphi_1 - J_2\ddot{\varphi}_2\delta\varphi_2 - J_3\ddot{\varphi}_3\delta\varphi_3 - m_2\ddot{x}_2\delta x_2 + m_2 g\delta x_2 = 0 \tag{2}$$

Podstawmy równania więzów do równania pracy (2)

$$\delta x_1(-2m\ddot{x}_1) - 4mr^2\frac{\ddot{x}_1}{2r}\frac{\delta x_1}{2r} - 0{,}5mr^2\frac{2\ddot{x}_2}{r}\frac{2\delta x_1}{r} - 4{,}5mr^2\frac{\ddot{x}_2 - 2\ddot{x}_1}{1{,}5r}\left(\frac{\delta x_2 - 2\delta x_1}{1{,}5r}\right) = 0 \tag{3}$$

Przekształcam równanie i wyłączam δx_1 oraz δx_2 przed nawias:

$$\delta x_1\left[-5m\ddot{x}_1 - 8m\ddot{x}_1 + 4m\ddot{x}_2\right] + \delta x_2\left[-2m\ddot{x}_2 + 4m\ddot{x}_1 - 4m\ddot{x}_2 + 4mg\right] = 0 \tag{4}$$

Skoro współrzędne x_1 oraz x_2 są niezależne, to także przemieszczenia wirtualne δx_1 oraz δx_2 będą niezależne. Dlatego dla równanie pracy przygotowanej (4) będzie równe 0 niezależnie od przyjętych przemieszczeń wirtualnych tylko jeśli wyrażenia w nawiasach przy przemieszczeniach δx_1 oraz δx_2 będą równe 0. Prowadzi to do dwóch równań, z których obliczymy dwie niewiadome $\ddot{x}_1$ oraz $\ddot{x}_2$.

$$\begin{cases} -13m\ddot{x}_1 + 4m\ddot{x}_2 &= 0 \\ 4m\ddot{x}_1 - 6m\ddot{x}_2 + 4mg &= 0 \end{cases} \tag{5}$$

Rozwiązując powyższy układ równań uzyskamy przyspieszenia $\ddot{x}_1$ oraz $\ddot{x}_2$:

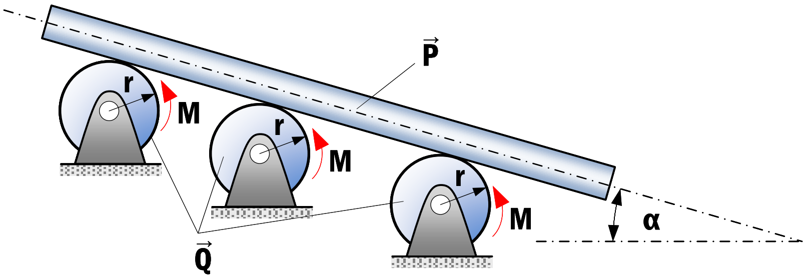
$$\begin{cases} \ddot{x}_1 &= \frac{8}{31}g \\ \ddot{x}_2 &= \frac{26}{31}g \end{cases} \tag{6}$$

Następnie wykorzystując równania ruchu jednostajnie przyspieszonego otrzymujemy równanie ruchu:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= v_{01}t + \tfrac{8}{31}g\tfrac{t^2}{2} \\ x_2(t) &= \tfrac{26}{31}g\tfrac{t^2}{2} \end{aligned} \tag{7}$$

1 Zadanie

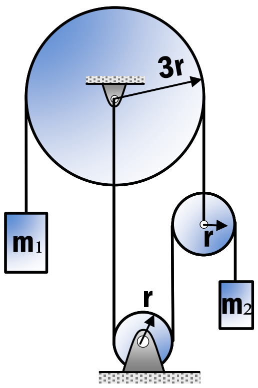
Na trzy jednorodne jednorodne krążki o ciężarach Q i promieniach R zamocowane przegubowo w linii pod kątem α do poziomu działają identyczne momenty sił M. Zakładając brak poślizgu płyty o krążki wyznacz jej przyspieszenie korzystając z równań d'Alemberta.



Odp. $\ddot{x} = \frac{3\frac{M}{r} - P\sin\alpha}{P+3Q} 2g$

2 Zadanie

Na zespole bezmasowych bloczków wiszą dwie masy m_1 oraz m_2. Wyznacz przyspieszenia tych mas, korzystając z równań d'Alemberta.

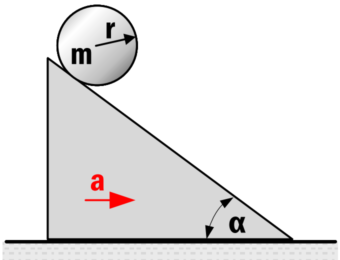


3 Zadanie

Krążek o masie m i promieniu r stacza się po ruchomej równi pochyłej nachylonej pod kątem α. Wyznacz przyspieszenie krążka jeśli równia porusza się z przyspieszeniem $\vec{a}$.

***Dane*:** m, r, a, α

***Szukane*:** a_k



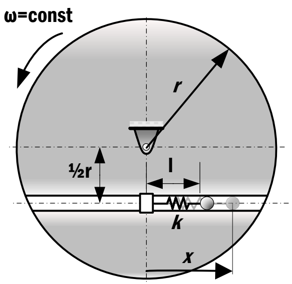
4 Zadanie

Kulka o masie m zaczepiona jest do jednego końca sprężyny o sztywności k i może poruszać się wzdłuż wydrążonego kanału jak na rysunku poniżej. Drugi koniec sprężyny zamocowany jest do przegrody, która jest nieruchoma względem wirującej tarczy ze stałą prędkością kątową ω. Długość swobodna (nieodkształconej) sprężyny wynosi l. Wyznacz różniczkowe równanie ruchu względnego kulki wewnątrz kanału oznaczonej współrzędną x.

***Dane*:** ω, m, r, l, k

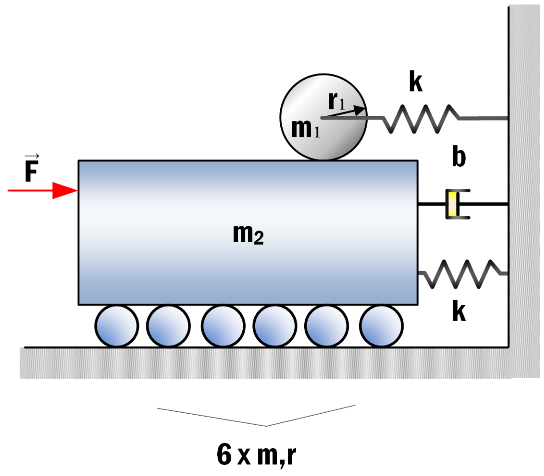
***Szukane*:**

różniczkowe równanie ruchu względnego



5 Zadanie

Krążek o masie m_1 i promieniu r_1 zaczepiony jest do sprężyny o sztywności k i może toczyć się bez poślizgu po suwnicy o masie m_2 popychanej siłą $\vec{F}$ i poruszającej się na sześciu rolkach, każda o masie m i promieniu r. Wyznacz różniczkowe równania ruchu tego układu posługując się równaniami d'Alemberta.



***Dane*:** $m_1, m_2, m, r_1, r, k, b, F$

***Szukane*:**

różniczkowe równania ruchu