
Zasada prac wirtualnych

dr inż. Sebastian Pakuła

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

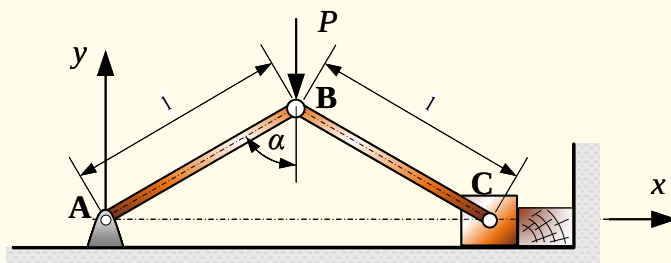
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

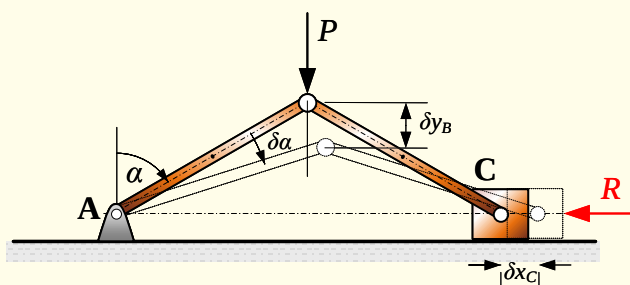
e-mail: spakula@agh.edu.pl
<http://home.agh.edu.pl/~spakula/>

Przykład:

Wyznacz siłę R wywieraną na drewniany blok przez siłę P za pomocą mechanizmu imadła przedstawionego na rysunku.

**Rozwiązanie:**

Najpierw uwalniamy więź, którego reakcja nas interesuje - a więc ścianę. W miejsce ściany rysujemy siłę reakcji R skierowaną dowolnie. Po uwolnieniu od więzów otrzymaliśmy mechanizm o jednym stopniu swobody. (Skoro uwolniliśmy jeden więź, a wcześniej układ był statyczny i miał zero stopni swobody, to teraz ma jeden)



Ruch zależy od jednej współrzędnej - przyjmijmy, że α . Zapiszmy zatem równania więzów przedstawiających położenia przegubów w funkcji α .

Równania więzów:

$$x_C = 2l \sin(\alpha) \quad y_B = l \cos(\alpha)$$

Wariacja równań więzów:

$$\delta x_C = 2l \cos(\alpha) \delta \alpha \quad \delta y_B = -l \sin(\alpha) \delta \alpha$$

Widać, że przemieszczenie wirtualne (przygotowane) dla współrzędnej pionowej współrzędnej punktu B jest ujemne (dla $0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Oznacza, to że wzrostowi kąta α o $\delta \alpha$ towarzyszy **zmniejszenie** współrzędnej y_B o wartość δy_B . Jest to zgodne z intuicją.

Zasada prac przygotowanych:

$$\delta W = -P \delta y_B - R \delta x_C = 0$$

W pracy zapisaliśmy siłę P oraz R ze znakiem "-", ponieważ są skierowane przeciwnie do przyjętego układu współrzędnych. Po podstawieniu i wyłączeniu przed nawias $\delta \alpha$ otrzymujemy:

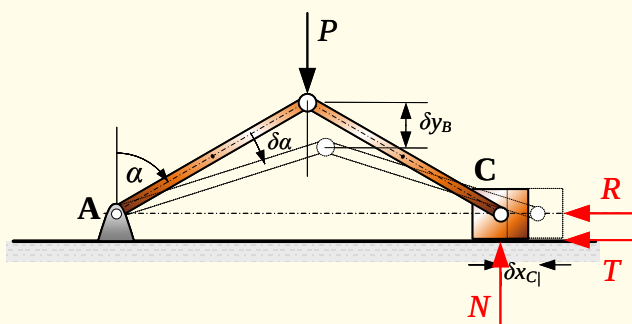
$$(Pl \sin \alpha - 2Rl \cos \alpha) \delta \alpha = 0$$

Praca wirtualna musi być równa 0 dla każdego możliwego przemieszczenia $\delta\alpha$. W związku z tym, wyrażenie w nawiasie musi być 0. Stąd obliczymy szukaną reakcję R :

$$R = \frac{1}{2}Ptg\alpha$$

Rozwiązanie (wariant z tarciem):

Założmy, że oddziałuje tarcie, a współczynnik tarcia między klockiem a podłożem wynosi μ . W związku z tym potrzebujemy obliczyć jego wartość, która z kolei zależy od nacisku N . Nacisk ten możemy obliczyć klasycznie (albo również z ZPP) albo przyjąć prawo symetrii, co prowadzi do wniosku, że: $N = \frac{1}{2}P$, a tarcie $T = \frac{1}{2}\mu P$.



Zasada prac przygotowanych:

$$\delta W = -P\delta y_B - R\delta x_C - T\delta x_C = 0$$

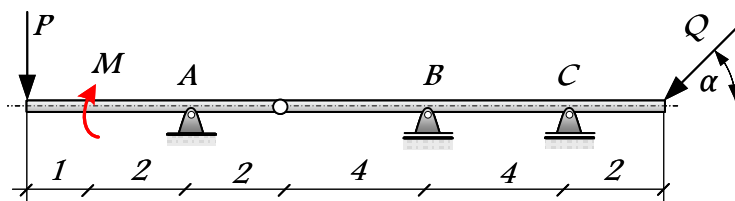
$$(Pl \sin \alpha - 2Rl \cos \alpha - \mu Pl \cos \alpha) \delta \alpha = 0$$

$$\begin{aligned} \delta W = -P\delta y_B - R\delta x_C - T\delta x_C &= 0 \\ (Pl \sin \alpha - 2Rl \cos \alpha - \mu Pl \cos \alpha) \delta \alpha &= 0 \end{aligned}$$

$$R = \frac{1}{2}P(tg\alpha - \mu)$$

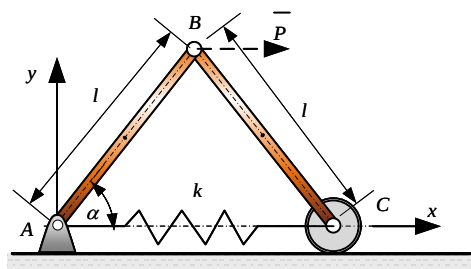
1 Zadanie

Wyznacz siły reakcji podpór belki obciążonej jak na rysunku stosując zasadę prac przygotowanych.



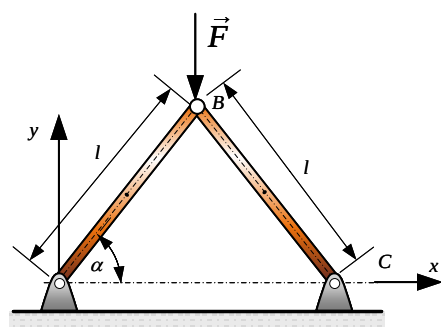
2 Zadanie

Układ przed przyłożeniem siły P do przegubu w punkcie B zajmuje położenie równowagi jak na rysunku, a sprężyna o sztywności k nie jest odkształcona. W wyniku przyłożenia siły, ramiona ugną się i układ znajdzie nowe położenie równowagi. Wyznacz nowe położenie równowagi podając kąt β jaki tworzą ramiona układu z podłożem. Dane: P, l, k, α .



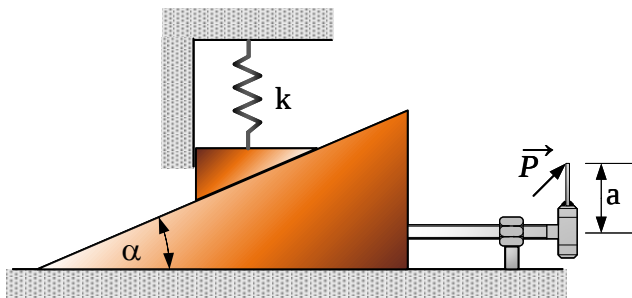
3 Zadanie

Oblicz składowe reakcji podpór A i C korzystając z zasady prac przygotowanych.



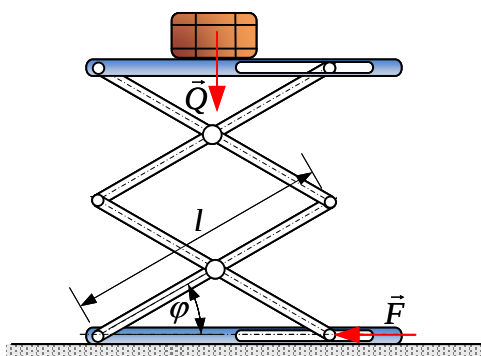
4 Zadanie

Dana jest prasa klinowa jak na rysunku. Wyznacz siłę S w ściskanej sprężynie w przypadku, gdy nakrętka jest wkręcana z siłą $P = 1\text{ kN}$ przyłożona do końca rękojeści o długości $a = 0,6\text{ m}$ prostopadle do osi śruby i rękojeści. Skok śruby wynosi $h = 12\text{ mm}$. Kąt przy wierzchołku klina wynosi $\alpha = 30^\circ$. Rozpatrzyć dwa warianty: a) bez tarcia, b) z uwzględnieniem tarcia pomiędzy klinem, a podłożem (ciężar klina, sprężyny i łącznika pominąć). Przyjąć do obliczeń $\mu = 0,3$.



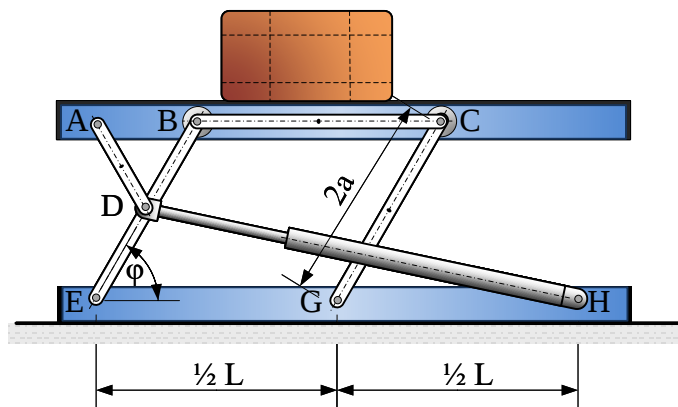
5 Zadanie

Wyznacz niezbędną wartość siły F potrzebną do uniesienia ciężaru Q za pomocą podnośnika nożycowego jak na rysunku. Dane: l, φ, Q .



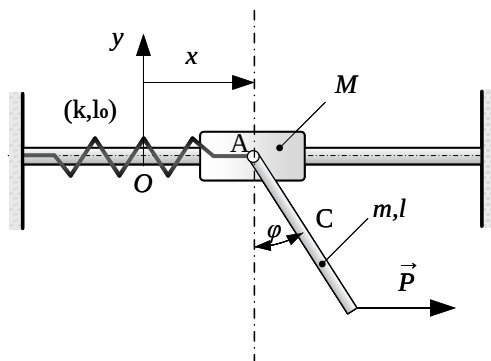
6 Zadanie

Podnośnik hydrauliczny służy do podnoszenia jedno-tonowych skrzyń. Składa się z platformy oraz dwóch identycznych systemów dźwigowych, na który oddziałują dwa hydrauliczne siłowniki. (Tylko jeden siłownik jest widoczny). Człony EDB i CG mają długość $2a$, a człon AD jest przymocowany w środku EDB . Określ siłę wywieraną przez poszczególne siłowniki gdy podnoszą skrzynię o ciężarze 1 tony. $\varphi = 60^\circ$, $a = 0,70m$ oraz $L = 3,2m$



7 Zadanie

Do mechanizmu jak na rysunku przyłożoną daną poziomą siłę P . Stosując zasadę prac przygotowanych znajdź położenie równowagi mechanizmu (x, φ) - współrzędne uogólnione. Dane: M, m, l, l_0, k, g, P (l_0 - długość swobodna sprężyny).

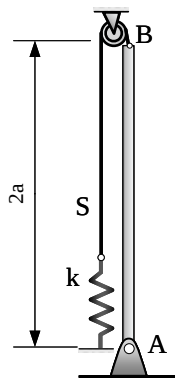


$$\text{Odp: } x = \frac{P}{c}, \quad \text{tg}(\varphi) = \frac{2P}{mg}$$

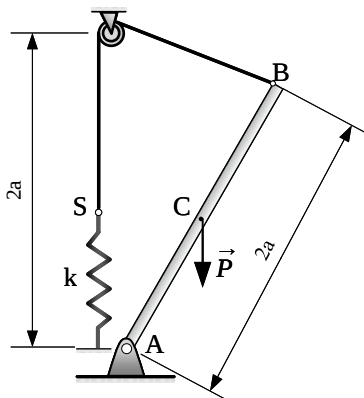
8 Zadanie

Dla układu przedstawionego na rysunku znaleźć kąt α odchylenia od pionu belki o ciężarze P , dla którego układ pozostaje w równowadze. Dane: P, a, k, l_0, l , gdzie: l - długość liny SB ; l_0 - długość swobodna sprężyny. Należy uznać, że w chwili początkowej istnieje napięcie sprężyny k . (tzn. $2a \neq l_0 + l$)

Przed pochyleniem belki



Po pochyleniu belki



Odp: $\cos(\alpha) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{k(2a - l_0 - l)}{P - 4ka} \right)^2$