Więzy i zasada prac wirtualnych

dr inż. Sebastian Pakuła

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

e-mail: spakula@agh.edu.pl
http://home.agh.edu.pl/~spakula/

Wprowadzenie

Przesunięcie przygotowane (wirtualne):
Jest to inaczej każde dowolne możliwe przemieszczenie z więzami, które są w danej chwili zamrożone (nie zmieniają się w czasie). Jeśli położenie punktu oznaczymy wektorem $\vec{r}$ to przesunięcie przygotowane oznaczamy symbolem $\delta\vec{r}$

Praca przygotowana:
Pracą przygotowaną (wirutalną) δW siły $\vec{F}$ nazywamy iloczyn tej siły i przesunięcia przygotowanego $\delta\vec{r}$.

Zasada prac przygotowanych:
Warunkiem koniecznym i wystarczającym do zachowania równowagi punktów materialnych jest to, aby suma prac przygotowanych wszystkich sił oraz reakcji więzów wynosiła zero dla dowolnych przemieszczeń przygotowanych (wirtualnych) układu.
Jeśli mamy do czynienia z więzami idealnymi, to praca przygotowana sił reakcji takich więzów jest zawsze równa 0.

Więzy stanowią ograniczenia dla poruszających się ciał. Więdzy możemy podzielić wg następujących kryteriów:

1. geometryczne (holonomiczne) i kinematyczne (nieholonomiczne, niecałkowalne)
2. skleronomiczne (niezależne jawnie od czasu) i reonomiczne (zależne od czasu)

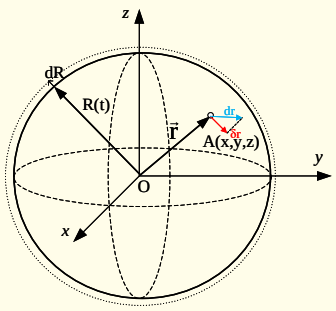
W układach mechanicznych o więzach wyłącznie skleronomicznych, przemieszczenia wirtualne (przygotowane) są takie same jak przemieszczenia rzeczywiste. W takich układach zasadę prac przygotowanych możemy zastąpić zasadą mocy chwilowych bowiem $\delta r \sim \dot{r}$.

Przykłady:

Przykład 1

Zapisz równanie więzów punktu, którego ruch ograniczony jest sferą o zmieniającym się w czasie promieniu $R(t)$. Wyznacz zależności przemieszczeń rzeczywistych i wirtualnych.

Rozwiązanie:

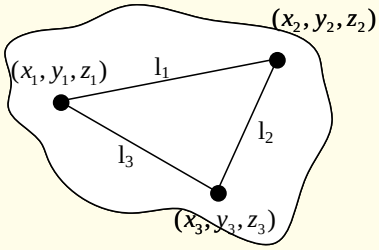


Rzeczywiste	Wirtualne
$x^2+y^2+z^2-R(t)^2=0$	$x^2+y^2+z^2-R(t)^2=0$
$2x\dot{x}+2y\dot{y}+2z\dot{z}-2R\dot{R}=0$	$2x\delta x+2y\delta y+2z\delta z=0$
$xdx+ydy+zdz=RdR$	$x\delta x+y\delta y+z\delta z=0$
$dr=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$	$\delta r=\sqrt{\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2}$
$dr \neq \delta r$	

Przykład 2

Zapisz równania więzów układu punktów materialnych, które pozostają względem siebie w stałej odległości. Odległość między punktami 1 i 2 wynosi l_1, między punktami 2 i 3 l_2, a między punktami 1 i 3 l_3. Określ liczbę swobody takiego układu.

Rozwiązanie:



Równania więzów:

$$\begin{cases} f_1 &= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-l_1^2=0 \\ f_2 &= (x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2-l_2^2=0 \\ f_3 &= (x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2-l_3^2=0 \end{cases}$$

Liczba stopni swobody:

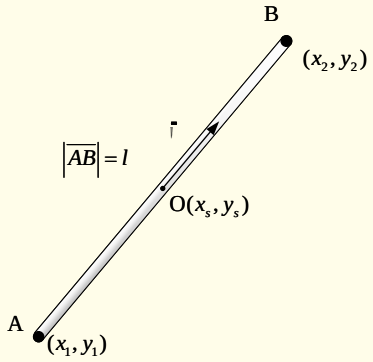
$$s = 3n - w = 3 \cdot 3 - 3$$

gdzie n - liczba punktów materialnych; w - liczba równań więzów.
Wynika z tego, że każda bryła sztywna, którą możemy opisać za pomocą trzech punktów nieporuszających się względem siebie i nie leżących na jednej prostej, ma 6 stopni swobody.

Przykład 3

Chłopiec porusza się po lodzie na jednej łyżwie. Kontakt łyżwy z lodem jest liniowy i uniemożliwia obrót łyżwy wokół osi pionowej. Określić równanie więzów narzucone na ruch łyżwy.

Rozwiązanie:



Równanie więzu:

$f_1 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-l^2$

jest to więz holonomiczny-skleronomiczny

$x_s = \frac{x_2-x_1}{2}, y_s = \frac{y_2-y_1}{2}$

$\frac{\dot{x}_s}{\dot{y}_s} = \frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$ - łyżwa porusza się tylko wzdłuż panczeny

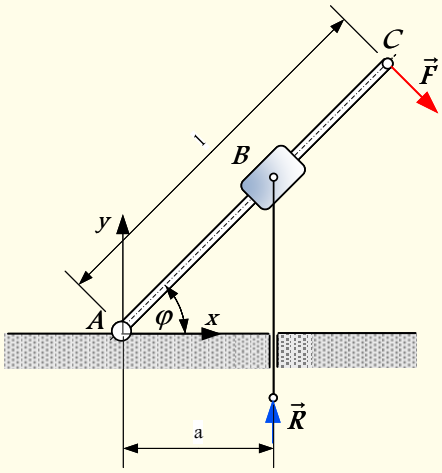
$f_2 = \dot{x}_s(y_2-y_1) - \dot{y}_s(x_2-x_1)$

jest to więz nieholonomiczny-skleronomiczny

Przykład 4

Wyznacz wartość siły F przyłożonej prostopadle do ramienia $\vec{AB}$ potrzebnej do zachowania równowagi mechanizmu przedstawionego na rysunku, obciążonego siłą R.

Dane: R, a, l, φ



Rozwiązanie:
Jeśli mechanizm ma pozostać w równowadze to układ sił obciążający go musi spełniać zasadę prac przygotowanych:

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{r}_C + \vec{R} \cdot \delta\vec{r}_B = 0 \tag{1}$$

Równanie więzów:

$f_1 = x_B - a = 0$

$f_2 = y_B - a\,\mathrm{tg}(\varphi) = 0$

$f_3 = x_C - l\cos(\varphi) = 0$

$f_4 = y_C - l\sin(\varphi) = 0$

Dokonajmy wariacji każdego z równań więzów wg.:

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial f_i}{\partial q_j}\delta q_j = 0 \tag{2}$$

otrzymamy następujące wyrażenia:
$\delta x_B = 0$

$\delta y_B - \frac{a}{\cos^2(\varphi)}\delta\varphi = 0$

$\delta x_C + l\sin(\varphi)\delta\varphi = 0$

$\delta y_C - l\cos(\varphi)\delta\varphi = 0$

Wiedząc, że $\delta\vec{r}_B = [\delta x_B, \delta y_B]$ oraz $\delta\vec{r}_C = [\delta x_C, \delta y_C]$, podstawmy równania więzów do równania pracy wirtualnej (1).

$$[F\sin(\varphi), -F\cos(\varphi)] \cdot [-l\sin(\varphi)\delta\varphi, -l\cos(\varphi)\delta\varphi] + [0, R] \cdot [0, \frac{a}{\cos^2(\varphi)}\delta\varphi] = 0 \tag{3}$$

$$\delta\varphi\left(-Fl\sin^2(\varphi) - Fl\cos^2(\varphi) + R\frac{a}{\cos^2(\varphi)}\right) = 0 \tag{4}$$

Praca musi byc równa 0 dla każdego możliwego przemieszczenia $\delta\varphi$, w związku z tym wyrażenie w nawiasie musi być równe 0. Po skorzystaniu z własności jedynki trygonometrycznej możemy

obliczyć szukaną wartość siły F:

$$F = R\frac{a}{l\cos^2(\varphi)} \tag{5}$$

1 Zadanie

Punkt materialny P w czasie ruchu znajduje się na powierzchni kuli o promieniu R, której środek znajduje się w punkcie $S(R, 0, R)$. Napisz równanie więzów. Sklasyfikuj więzy. Oblicz gradient więzów w punkcie P.
Odp. $\nabla f = [2(x - R), 2y, 2(z - R)]$

2 Zadanie

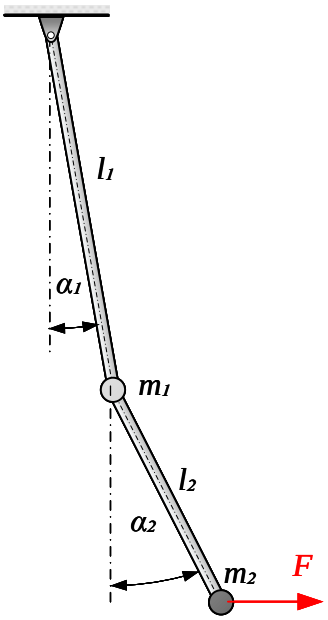
Punkt materialny P w czasie ruchu znajduje się na powierzchni kuli o promieniu R, której środek S porusza się ze stałą prędkością u_0 wzdłuż osi y układu współrzędnych 0_{xyz}. W chwili początkowej $t = 0$ punkt S znajdował się w początku układu współrzędnych. Napisz równanie więzów. Sklasyfikuj więzy. Oblicz gradient więzów w punkcie P.
Zastanów się, jak zmieniają się współrzędne punktu S w czasie ruchu jego wzdłuż osi y. Zapisz te współrzędne wzorem, a następnie postępuj tak, jak w zadaniu poprzednim.

3 Zadanie

Wyznacz siłę nacisku śruby mikrometrycznej o skoku h na kulkę, jeśli oddziałujemy na nią momentem obrotowym M.

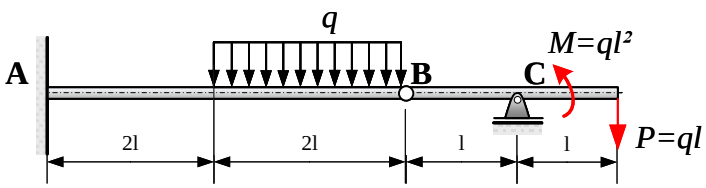
4 Zadanie

Zapisz równania więzów podwójnego wahadła matematycznego, wiążące współrzędne kartezjańskie (x, y) mas znajdujących się na końcach wahadeł o długości odpowiednio l_1 oraz l_2 za pomocą współrzędnych kątowych α_1, α_2. Wyznacz położenie równowagi α_1, α_2 jeśli na masę m_2 działa stała pozioma siła F.



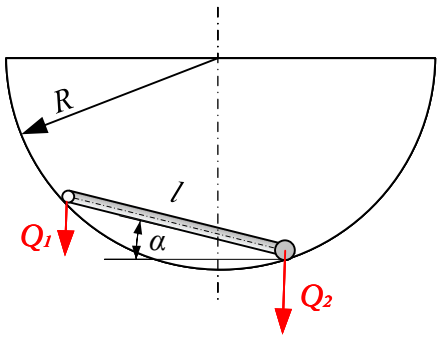
5 Zadanie

Moment siły reakcji utwierdzenia korzystając z zasady prac wirtualnych. Dane: q, l



6 Zadanie

Znajdź położenie równowagi (α) pręta o długości $l = R$ z ciężarami Q_1 oraz Q_2 na jego końcach, wspierającego się na półokręgu o promieniu R. Ciężary mają niewielkie wymiary w stosunku do R. Dane: $Q_1 = 100N, Q_2 = 200N, R = 1m$



Odp. $\alpha = 10,9°$