

---

# Więzy i zasada prac wirtualnych

---

**dr inż. Sebastian Pakuła**

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

e-mail: [spakula@agh.edu.pl](mailto:spakula@agh.edu.pl)  
<http://home.agh.edu.pl/~spakula/>

## Wprowadzenie

### Przesunięcie przygotowane (wirtualne):

Jest to inaczej każde dowolne możliwe przemieszczenie z więzami, które są w danej chwili zamrożone (nie zmieniają się w czasie). Jeśli położenie punktu oznaczymy wektorem  $\vec{r}$  to przesunięcie przygotowane oznaczamy symbolem  $\delta\vec{r}$

### Praca przygotowana:

Pracą przygotowaną (wirtualną)  $\delta W$  siły  $\vec{F}$  nazywamy iloczyn tej siły i przesunięcia przygotowanego  $\delta\vec{r}$ .

### Zasada prac przygotowanych:

Warunkiem koniecznym i wystarczającym do zachowania równowagi punktów materialnych jest to, aby suma prac przygotowanych wszystkich sił oraz reakcji więzów wynosiła zero dla dowolnych przemieszczeń przygotowanych (wirtualnych) układu.

Jeśli mamy do czynienia z więzami idealnymi, to praca przygotowana sił reakcji takich więzów jest zawsze równa 0.

Więzy stanowią ograniczenia dla poruszających się ciał. Więzy możemy podzielić wg następujących kryteriów:

1. geometryczne (holonomiczne) i kinematyczne (nieholonomiczne, niecałkowalne)
2. skleronomiczne (niezależne jawnie od czasu) i reonomiczne (zależne od czasu)

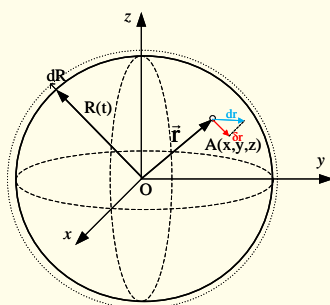
W układach mechanicznych o więzach wyłącznie skleronomicznych, przemieszczenia wirtualne (przygotowane) są takie same jak przemieszczenia rzeczywiste. W takich układach zasadę prac przygotowanych możemy zastąpić zasadą mocy chwilowych bowiem  $\delta r \sim \dot{r}$ .

## Przykłady:

### Przykład 1

Zapisz równanie więzów punktu, którego ruch ograniczony jest sferą o zmieniającym się w czasie promieniu  $R(t)$ . Wyznacz zależności przemieszczeń rzeczywistych i wirtualnych.

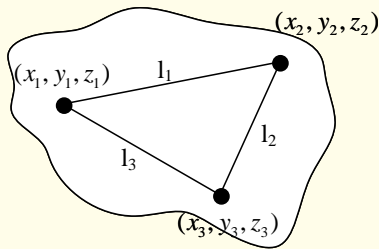
Rozwiązanie:



Rzeczywiste	Wirtualne
$x^2 + y^2 + z^2 - R(t)^2 = 0$	$x^2 + y^2 + z^2 - R(t)^2 = 0$
$2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} - 2R\dot{R} = 0$	$2x\delta x + 2y\delta y + 2z\delta z = 0$
$x dx + y dy + z dz = R dR$	$x\delta x + y\delta y + z\delta z = 0$
$dr = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$	$\delta r = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}$
$dr \neq \delta r$	

### Przykład 2

Zapisz równania więzów układu punktów materialnych, które pozostają względem siebie w stałej odległości. Odległość między punktami 1 i 2 wynosi  $l_1$ , między punktami 2 i 3  $l_2$ , a między punktami 1 i 3  $l_3$ . Określ liczbę swobody takiego układu.

**Rozwiązanie:**

Równania więzów:

$$\begin{cases} f_1 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l_1^2 = 0 \\ f_2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 - l_2^2 = 0 \\ f_3 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 - l_3^2 = 0 \end{cases}$$

Liczba stopni swobody:

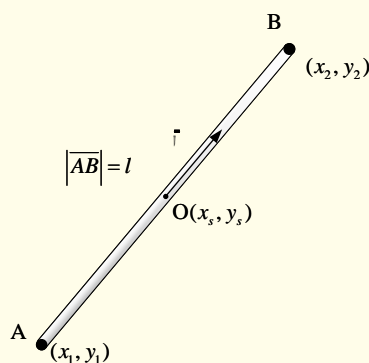
$$s = 3n - w = 3 \cdot 3 - 3$$

gdzie  $n$  - liczba punktów materialnych;  $w$  - liczba równań więzów.

Wynika z tego, że każda bryła sztywna, którą możemy opisać za pomocą trzech punktów nieporuszających się względem siebie i nie leżących na jednej prostej, ma 6 stopni swobody.

**Przykład 3**

Chłopiec porusza się po lodzie na jednej łyżwie. Kontakt łyżwy z lodem jest liniowy i uniemożliwia obrót łyżwy wokół osi pionowej. Określić równanie więzów narzucone na ruch łyżwy.

**Rozwiązanie:**

Równanie więzu:

$$f_1 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2$$

jest to więz holonomiczny-skleronomiczny

$$x_s = \frac{x_2 - x_1}{2}, y_s = \frac{y_2 - y_1}{2}$$

 $\frac{\dot{x}_s}{\dot{y}_s} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$  - łyżwa porusza się tylko wzdłuż panczeny

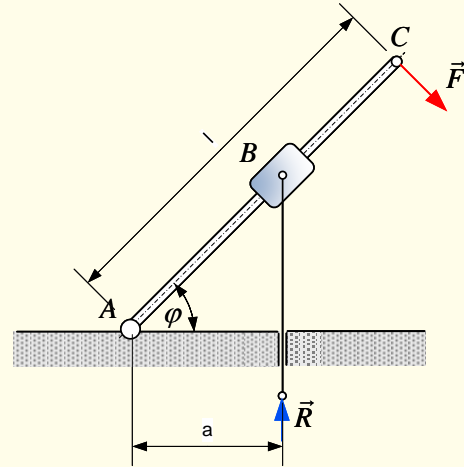
$$f_2 = \dot{x}_s(y_2 - y_1) - \dot{y}_s(x_2 - x_1)$$

jest to więz nieholonomiczny-skleronomiczny

**Przykład 4**

Wyznacz wartość siły  $F$  przyłożonej prostopadle do ramienia  $AB$  potrzebnej do zachowania równowagi mechanizmu przedstawionego na rysunku, obciążonego siłą  $R$ .

Dane:  $R, a, l, \varphi$

**Rozwiązanie:**

Jeśli mechanizm ma pozostać w równowadze to układ sił obciążający go musi spełniać zasadę prac przygotowanych:

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_C + \vec{R} \cdot \delta \vec{r}_B = 0 \quad (1)$$

Równanie więzów:

$$f_1 = x_B - a = 0$$

$$f_2 = y_B - a \operatorname{tg}(\varphi) = 0$$

$$f_3 = x_C - l \cos(\varphi) = 0$$

$$f_4 = y_C - l \sin(\varphi) = 0$$

Dokonyjmy wariacji każdego z równań więzów wg.:

$$\sum_{j=1}^s \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0 \quad (2)$$

otrzymamy następujące wyrażenia:

$$\delta x_B = 0$$

$$\delta y_B - \frac{a}{\cos^2(\varphi)} \delta \varphi = 0$$

$$\delta x_C + l \sin(\varphi) \delta \varphi = 0$$

$$\delta y_C - l \cos(\varphi) \delta \varphi = 0$$

Wiedząc, że  $\delta \vec{r}_B = [\delta x_B, \delta y_B]$  oraz  $\delta \vec{r}_C = [\delta x_C, \delta y_C]$ , podstawmy równania więzów do równania pracy wirtualnej (1).

$$[F \sin(\varphi), -F \cos(\varphi)] \cdot [-l \sin(\varphi) \delta \varphi, -l \cos(\varphi) \delta \varphi] + [0, R] \cdot [0, \frac{a}{\cos^2(\varphi)} \delta \varphi] = 0 \quad (3)$$

$$\delta \varphi \left( -Fl \sin^2(\varphi) - Fl \cos^2(\varphi) + R \frac{a}{\cos^2(\varphi)} \right) = 0 \quad (4)$$

Praca musi być równa 0 dla każdego możliwego przemieszczenia  $\delta \varphi$ , w związku z tym wyrażenie w nawiasie musi być równe 0. Po skorzystaniu z własności jedynki trygonometrycznej możemy

obliczyć szukaną wartość siły  $F$ :

$$F = R \frac{a}{l \cos^2(\varphi)} \quad (5)$$

### 1 Zadanie

Punkt materialny  $P$  w czasie ruchu znajduje się na powierzchni kuli o promieniu  $R$ , której środek znajduje się w punkcie  $S(R, 0, R)$ . Napisz równanie więzów. Sklasyfikuj więzy. Oblicz gradient więzów w punkcie  $P$ .

*Odp.*  $\nabla f = [2(x - R), 2y, 2(z - R)]$

### 2 Zadanie

Punkt materialny  $P$  w czasie ruchu znajduje się na powierzchni kuli o promieniu  $R$ , której środek  $S$  porusza się ze stałą prędkością  $u_0$  wzdłuż osi  $y$  układu współrzędnych  $0_{xyz}$ . W chwili początkowej  $t = 0$  punkt  $S$  znajdował się w początku układu współrzędnych. Napisz równanie więzów. Sklasyfikuj więzy. Oblicz gradient więzów w punkcie  $P$ .

*Zastanów się, jak zmieniają się współrzędne punktu  $S$  w czasie ruchu jego wzdłuż osi  $y$ . Zapisz te współrzędne wzorem, a następnie postępuj tak, jak w zadaniu poprzednim.*

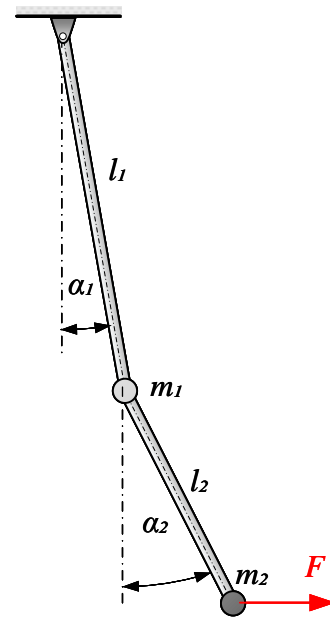
### 3 Zadanie

Wyznacz siłę nacisku śruby mikrometrycznej o skoku  $h$  na kulkę, jeśli oddziałujemy na nią momentem obrotowym  $M$ .



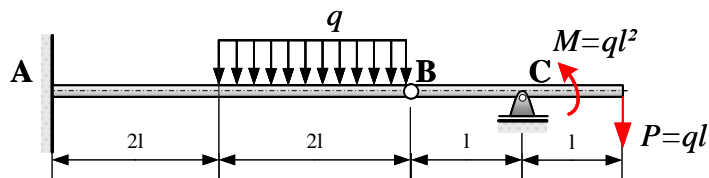
#### 4 Zadanie

Zapisz równania więzów podwójnego wahadła matematycznego, wiążące współrzędne kartezjańskie  $(x, y)$  mas znajdujących się na końcach wahadeł o długości odpowiednio  $l_1$  oraz  $l_2$  za pomocą współrzędnych kątowych  $\alpha_1, \alpha_2$ . Wyznacz położenie równowagi  $\alpha_1, \alpha_2$  jeśli na masę  $m_2$  działa stała pozioma siła  $F$ .



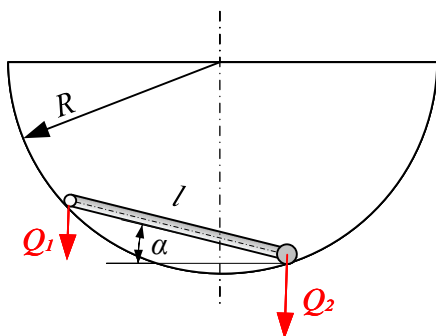
#### 5 Zadanie

Moment siły reakcji utwierdzenia korzystając z zasady prac wirtualnych. Dane:  $q, l$



## 6 Zadanie

Znajdź położenie równowagi ( $\alpha$ ) pręta o długości  $l = R$  z ciężarami  $Q_1$  oraz  $Q_2$  na jego końcach, wspierającego się na półokręgu o promieniu  $R$ . Ciężary mają niewielkie wymiary w stosunku do  $R$ . Dane:  $Q_1 = 100N$ ,  $Q_2 = 200N$ ,  $R = 1m$



Odp.  $\alpha = 10,9^\circ$