
Zasady energii

dr inż. Sebastian Pakuła

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

e-mail: spakula@agh.edu.pl
<http://home.agh.edu.pl/~spakula/>

ZASADY ENERGII i PRACY

Zasada zachowania energii:

$$E - U = const$$

E - energia kinetyczna

U - energia potencjalna

W układach zachowawczych energia mechaniczna jest stała.

Zasada równoważności energii kinetycznej i pracy:

$$\Delta E = W$$

Zmiana energii kinetycznej układu równa jest pracy wykonanej nad tym układem.

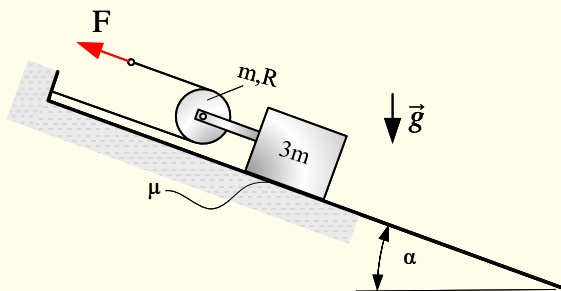
Praca:

$$W = \int_a^b F ds - \text{praca}$$

Praca na drodze od a do b jest równa sumie iloczynów skalarnych siły \vec{F} oraz niewielkich odcinków drogi \vec{ds} wzdłuż drogi $a - b$.

Przykład

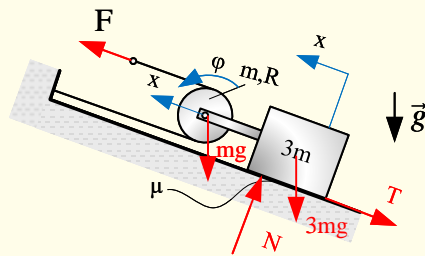
Układ składa się z sanek o masie $3m$ z krążkiem o masie m i promieniu R . Układ jest poruszany za pomocą liny przewiniętej przez krążek z siłą F . Uwzględniając tarcie sanek o podłoże (współczynnik tarcia μ), wyznacz równanie prędkości sanek w funkcji drogi $v(x)$. Jakie jest przyspieszenie sanek?



Rozwiązanie

Równanie prędkości sanek w funkcji drogi $v(x)$ wyznaczmy w oparciu o zasadę **równoważności energii kinetycznej i pracy**. Sugeruje to v i x . Najpierw określamy ruch poszczególnych brył w układzie. Oznaczamy ruch środków mas brył oraz obroty. Krążek porusza się ruchem płaskim, więc oznaczamy jego obrót jako φ a przesunięcie jego środka przez x . Pozostała część - korpus o masie $3m$ porusza się ruchem postępowym i jego przesunięcie także wynosi x , ponieważ jest sztywno zamocowany z osią krążka.

Następnie określamy siły jakie działają na układ. Zaniedbujemy tutaj siły wewnętrzne tj. siły reakcji łożysk - bowiem te siły nie wykonują pracy. Jedynie tarcie wykonuje tutaj pracę. W związku z tym do jego wyznaczenia potrzebujemy wyznaczyć wartość siły nacisku.



Krażek toczy się po nieruchomej linii, słuszne jest więc równanie więzu:

$$x = \varphi r$$

Zasada **równoważności kinetycznej i pracy** mówi:

$$\Delta E = W_{AB}$$

$$E_2 - E_1 = W_{AB}$$

Zmiana energii kinetycznej na drodze AB jest równana pracy sił na drodze AB .

Skoro układ nie poruszał się w chwili początkowej, energia kinetyczna na początku jest równa zero a więc $E_1 = 0$. Wyznamy energię kinetyczną w pewnej chwili gdy nastąpiło przesunięcie o dowolne x . Zakładamy, że wózek porusza się z prędkością v , a krażek z prędkością ω . Zależność pomiędzy nimi wyznacza równanie więzów:

$$v = \omega r$$

Zapiszmy równanie energii kinetycznej:

$$E_2 = \frac{mv^2}{2} + \frac{3mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

podstawiając równania więzów oraz moment bezwładności krażka otrzymujemy:

$$E_2 = 2mv^2 + \frac{mr^2 \frac{v^2}{r^2}}{4} = \frac{5}{2}mv^2$$

Zajmijmy się teraz pracą. Z równania równowagi składowych sił na kierunku prostopadłym do równi wynika, że nacisk wynosi $N = 4mg$. Zatem siła tarcia wynosi $T = \mu 4mg$. Pracę wykonują tutaj dwie siły F oraz T .

$$W = -Tx + F(\varphi r + x)$$

$$W = (2F - 4\mu mg)x$$

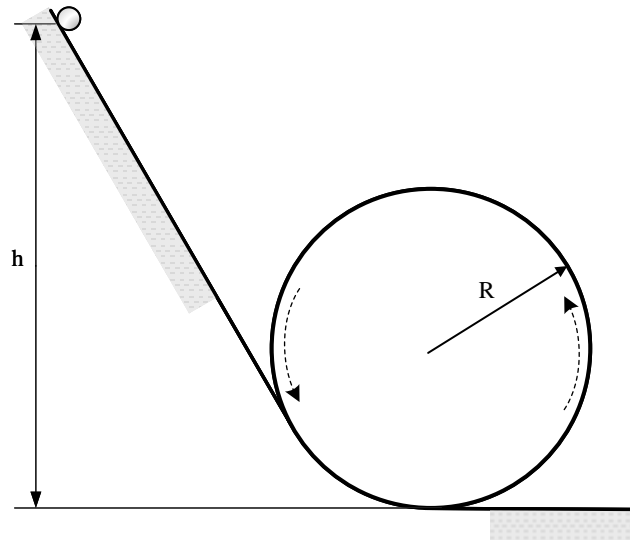
Podstawiając do równania równoważności energii kinetycznej i pracy otrzymujemy:

$$\frac{5}{2}mv^2 = (2F - 4\mu mg)x$$

$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{5} \left(\frac{2F}{m} - 4\mu g \right) x}$$

1 Zadanie

Niewielki krążek o masie m , ustawiono na torze posiadający pętle o promieniu R . Obliczyć na jakiej wysokości h należy ustawić punkt materialny, aby opisał on pętlę nie odrywając się od toru.



2 Zadanie

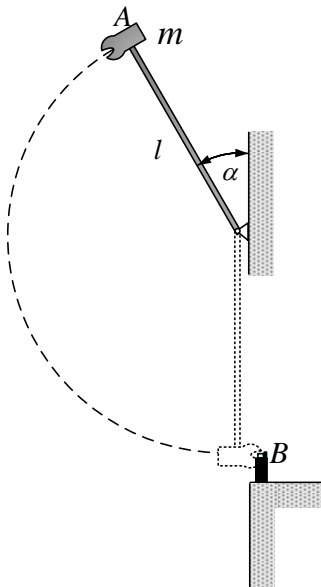
Oblicz jaką prędkość uderzenia będzie posiadał młot Charpy'go o masie m w chwili uderzenia o próbkę (w punkcie B). Młot w chwili opuszczenia odchylony był od pionu o kąt α .

Dane: m, M, l, α

Szukane: v_B

Uwzględnij że:

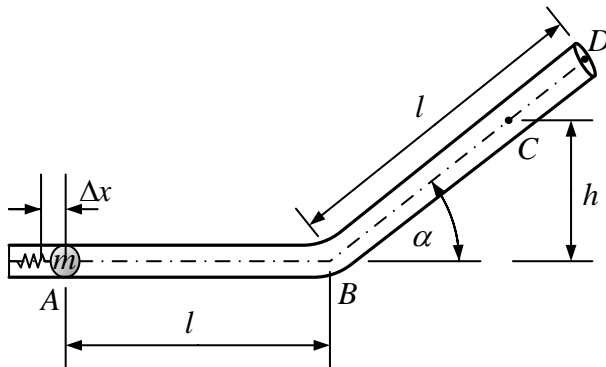
- Pręt jest nieważki
- Pręt ma masę M



3 Zadanie

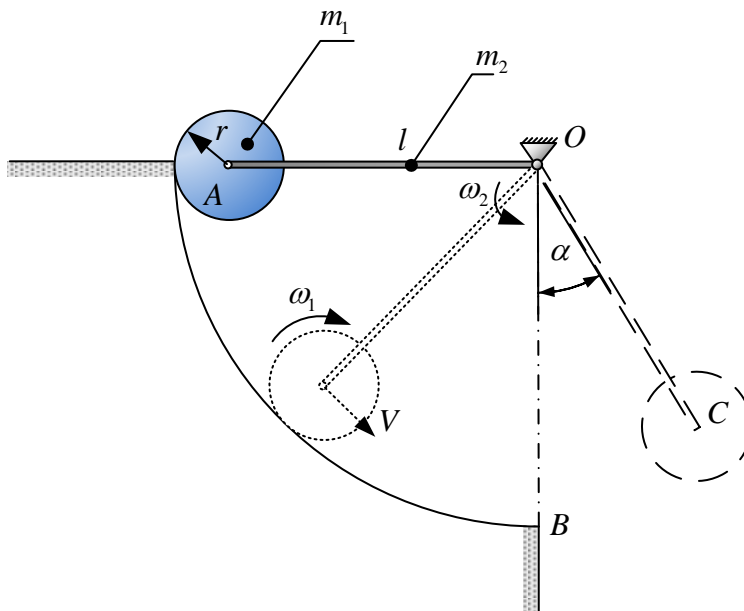
Na początku gładkiej, zagiętej rurki, tworzącej kąt α do poziomu (jak na rysunku), znajduje się sprężyna o sztywności k , przy której znajduje się kula o masie m . Oblicz:

- o jaką długość Δx należy ścisnąć sprężynę z kulką, aby kula wzniosła się do punktu C na wysokości h od poziomu rurki?
- oblicz jaką prędkość v_D będzie miała kula w punkcie D , jeśli odkształcimy sprężynę o Δx oraz na jaką maksymalną wysokość H_{max} się ona wzbije.
- Wykonaj zadania a),b) zakładając, że droga A-D jest chropowata o współczynniku tarcia kulki o podłoże μ .



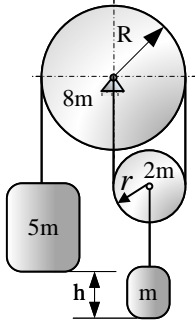
4 Zadanie

Na końcu pręta o długości l i masie m_2 , zamocowano krążek o promieniu r i masie m_1 . Początkowo pręt znajdował się w pozycji poziomej i został opuszczony bez prędkości początkowej. Zakładając, że krążek toczy się bez poślizgu oblicz o jaki kąt α wychyli się krążek od pionu.



5 Zadanie

Układ krążków i mas przedstawiony na rysunku znajduje rozpoczyna opuszczanie. Znajdź prędkość najbliższej masy m gdy przeciwległe masy $5m$ i m odległe o h się zrównają ze sobą.



6 Zadanie

Ciało o masie m_1 przebędzie drogę x pod działaniem momentu M_0 . Należy wyznaczyć prędkość ciała o masie m_5 . Lina jest nierozciągliwa.

