
Dynamika brył sztywnych

dr inż. Sebastian Pakuła

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

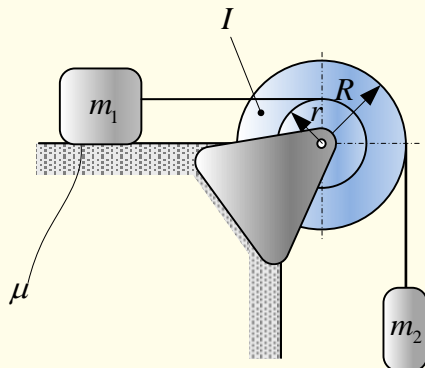
e-mail: spakula@agh.edu.pl
<http://home.agh.edu.pl/~spakula/>

Przykład

Wyznacz przyspieszenie masy m_2 oraz siły naciągu lin.

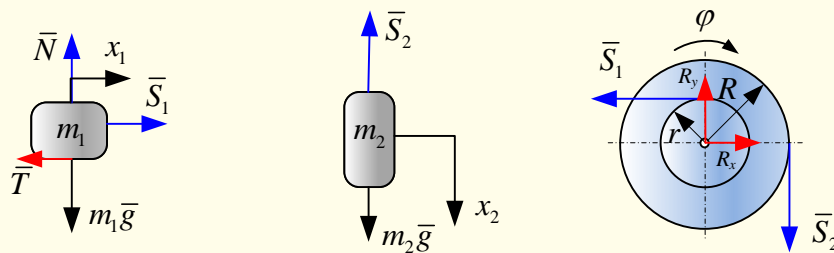
Dane: m_1, m_2, I, r, R

Szukane: a_2, S_1, S_2



Rozwiązanie

W pierwszym etapie rozdzielamy układ na podukłady: bloczka o masie m_1 , bloczka o masie m_2 oraz szpuli o momencie bezwładności I . Identyfikujemy ruch tych brył i określamy lokalne układy współrzędnych opisujące ten ruch. Odpowiednio są to ruchy: postępowy (prostoliniowy) x_1 i x_2 oraz ruch obrotowy φ .



Statyka: Po uwolnieniu więzów i oznaczeniu sił oddziałujących na każdy z podukładów zapisuje niezbędne równania równowagi do obliczenia sił reakcji (jeśli tego potrzebujemy). W tym wypadku potrzebujemy wyznaczyć siłę tarcia oddziałującą na bloczek o masie m_1 , która zależy od siły reakcji podłoża N .

$$\Sigma P_{iy} = 0 \Rightarrow N - m_1 g = 0$$

$$N = m_1 g$$

$$T = \mu m_1 g$$

Dynamika: Zapisuje dynamiczne równanie ruchu dla każdej z brył osobno.

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = S_1 - T \\ m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g - S_2 \\ I \ddot{\varphi} = S_2 R - S_1 r \end{cases}$$

Kinematyka: Na koniec zapisujemy kinematyczne zależności (**równania więzów**) ponieważ ruchy są od siebie zależne.

$$\begin{cases} x_1 = \varphi r \\ x_2 = \varphi R \end{cases}$$

Obliczenia: Powstaje w ten sposób układ pięciu równań o pięciu niewiadomych. Niewiadomymi są: $\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{\varphi}, S_1, S_2$. Po dwukrotnym zróżniczkowaniu równań więzów otrzymujemy:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \ddot{\varphi} r \\ \ddot{x}_2 = \ddot{\varphi} R \end{cases}$$

Podstawiając następnie te zależności do równań dynamicznych otrzymujemy już tylko trzy równania o trzech niewiadomych.

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\varphi} r = S_1 - \mu m_1 g / \cdot r \\ m_2 \ddot{\varphi} R = m_2 g - S_2 \cdot R \\ I \ddot{\varphi} = S_2 R - S_1 r \end{cases}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie przez r , drugie przez R i dodajmy je wszystkie do siebie stronami.

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} (I + m_1 r^2 + m_2 R^2) &= m_2 g R - \mu m_1 g r \\ \ddot{\varphi} &= \frac{m_2 g R - \mu m_1 g r}{I + m_1 r^2 + m_2 R^2} \end{aligned}$$

Mając przyspieszenie kątowe możemy za pomocą zróżniczkowanych równań więzów obliczyć pozostałe przyspieszenia.

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \ddot{\varphi} r = \frac{m_2 g R - \mu m_1 g r}{I + m_1 r^2 + m_2 R^2} r \\ \ddot{x}_2 = \ddot{\varphi} R = \frac{m_2 g R - \mu m_1 g r}{I + m_1 r^2 + m_2 R^2} R \end{cases}$$

Znając przyspieszenia, możemy wyznaczyć siły napięć linek z pierwszego i drugiego dynamicznego równania ruchu.

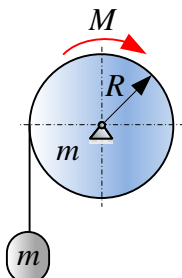
$$\begin{cases} S_1 = m_1 \ddot{\varphi} r + \mu m_1 g \\ S_2 = m_2 g - m_2 \ddot{\varphi} R \end{cases}$$

Momenty bezwładności (centralne):

1. pierścienie / rury: $I = mr^2$
2. pręt / belka: $I = \frac{ml^2}{12}$

1 Zadanie

Oblicz przyspieszenie bloczka o masie m znajdującego się na linie nawiniętej na bęben o takiej samej masie i promieniu R .

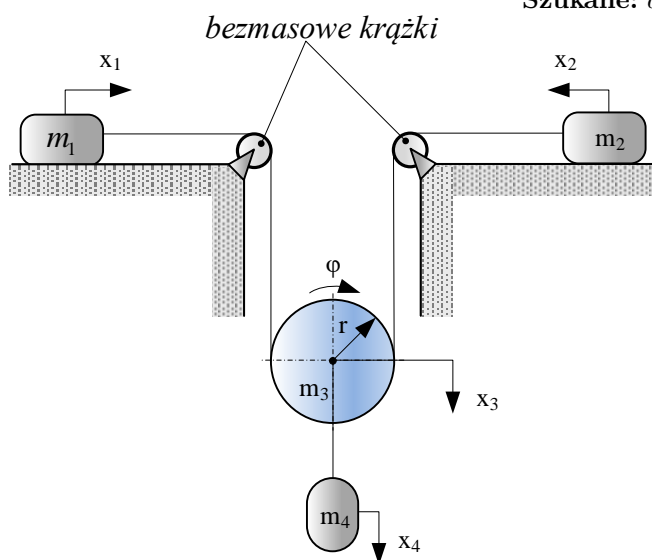


2 Zadanie

Oblicz przyspieszenie masy m_4 oraz siły napięcia lin w układzie. Zaznaczone krążki potraktować jako bezmasowe i zaniedbać tarcie bloczków o masach m_1, m_2 .

Dane: m_1, m_2, m_3, m_4, r

Szukane: a_4, S_1, S_2, S_3

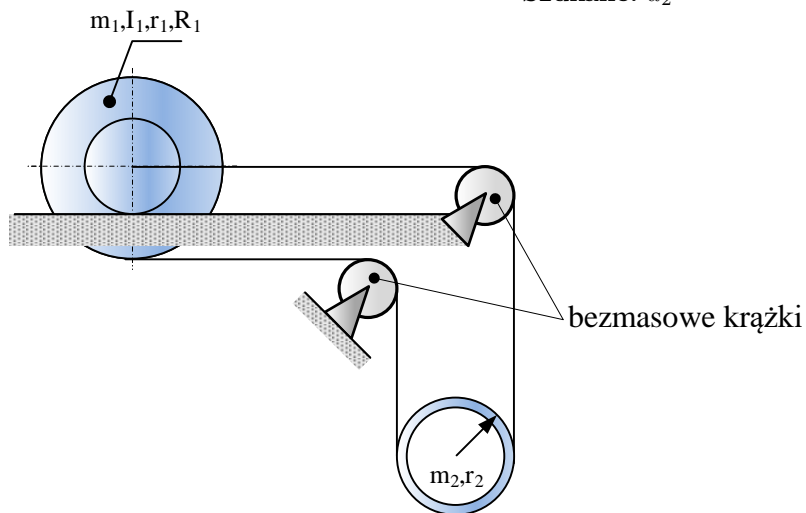


3 Zadanie

Oblicz przyspieszenie rury o masie m_2 . Zaznaczone krążki potraktować jako bezmasowe i przyjmując toczenie bez poślizgu szpuli o masie m_1 . Ramię oporów toczenia szpuli wynosi f .

Dane: $m, m_1, I_1, r_1, R_1, m_2, r_2, f$

Szukane: a_2

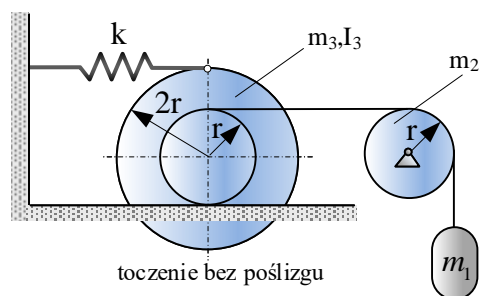


4 Zadanie

Wyznacz różniczkowe równanie ruchu i oblicz częstość drgań własnych przedstawionego układu szpuli, krążka i bloczka.

Dane: m_1, m_2, m_3, I_3, k, r

Szukane: Różniczkowe równanie ruchu ω_0

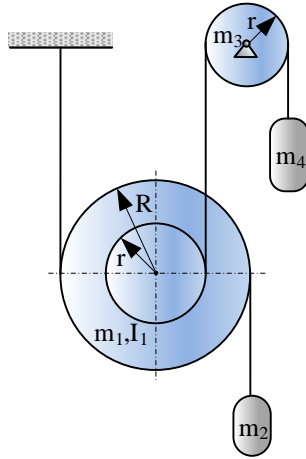


5 Zadanie

Oblicz przyspieszenie masy m_4 oraz naciąg linki zamocowanej do sufitu.

Dane: m_1, m_2, m_3, m_4, r, R

Szukane: S_1, a_4

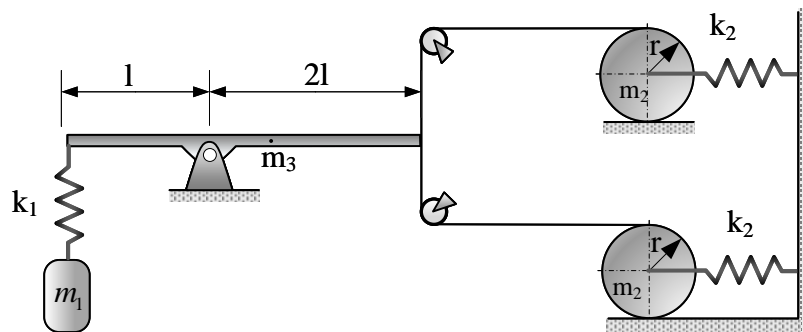


6 Zadanie

Wyznacz różniczkowe równania ruchu. Toczy się bez poślizgu.

Dane: $m_1, m_2, m_3, k_1, k_2, r, l$

Szukane: Różniczkowe równania ruchu

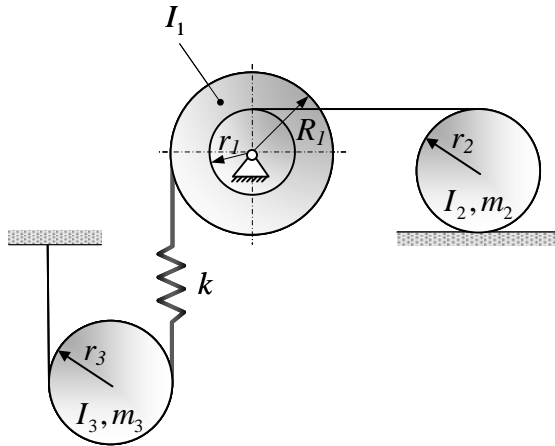


7 Zadanie

Wyznacz różniczkowe równania ruchu. Toczenie odbywa się bez poślizgu.

Dane: $I_1, I_2, I_3, m_2, m_3, k, r_1, R_1, r_2, r_3$

Szukane: Różniczkowe równania ruchu



8 Zadanie

Wyznacz różniczkowe równania ruchu. Toczenie odbywa się bez poślizgu.

Dane: $I_1, I_2, I_3, m_3, m_4, k, r_1, R_1, r_2, r_3$

Szukane: Różniczkowe równania ruchu

