
Dynamika brył sztywnych

dr inż. Sebastian Pakuła

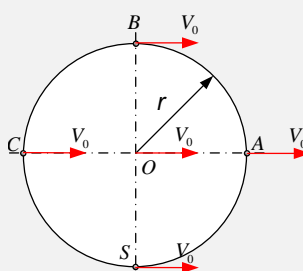
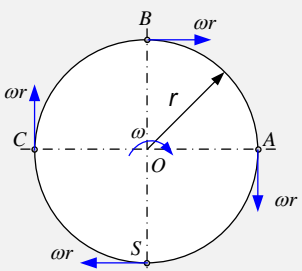
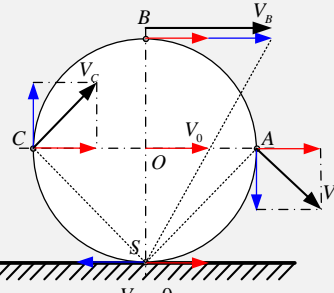
Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

e-mail: spakula@agh.edu.pl
<http://home.agh.edu.pl/~spakula/>

Kinematyka brył:

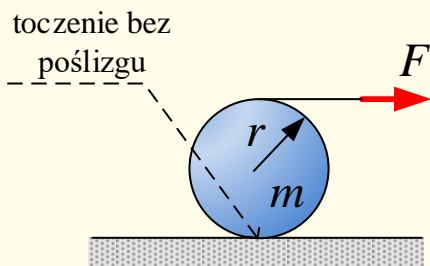
Ruch obrotowy	Ruch obrotowy	Ruch płaski
		
$m\vec{a} = \vec{F}$	$I\vec{\epsilon} = \vec{M}$	$m\vec{a} = \vec{F}$ $I\vec{\epsilon} = \vec{M}$

Przykład

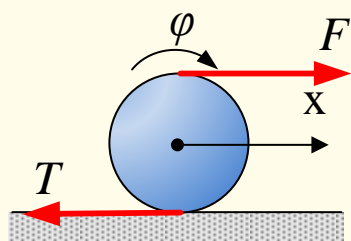
Oblicz przyspieszenie środka masy krążka, który jest ciągnięty za pomocą nawiniętej na niego liny z siłą F .

Dane: m, r, F

Szukane: a



Toczący się krążek bez poślizgu jest przykładem ruchu płaskiego. Oznaczamy współrzędne opisujące ruch płaski, uwalniamy układ od więzów i rysujemy siły oddziałujące na bryłę.



x – współrzędna środka masy

φ – współrzędna kątowa obrotu bryły

T – siła tarcia

F – siła naciągu liny

Zaniedbano tutaj siłę ciężkości oraz nacisku, ponieważ nie wpływają te siły na ruch bryły (w przypadku oporów toczenia, należałoby obliczyć nacisk z równania równowagi, które następnie zostanie użyty do wyznaczenia momentu oporu toczenia).

Następnie zapisujemy dynamiczne równania ruchu bryły:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F - T \\ I\ddot{\varphi} = Fr + Tr \end{cases}$$

gdzie: $I = \frac{mr^2}{2}$ – moment bezwładności krążka względem głównej centralnej osi bezwładności.

Tworzymy równania więzów, wiążące ruch środka masy x z ruchem obrotowym φ . Równanie to możemy napisać tylko w przypadku toczenia bez poślizgu!

$$x = \varphi r$$

$$\ddot{x} = \ddot{\varphi} r$$

Podstawiamy $\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{r}$ i moment bezwładności I do drugiego z układu równań i dzieląc obustronnie przez r otrzymujemy:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F - T \\ \frac{m}{2}\ddot{x} = F + T \end{cases}$$

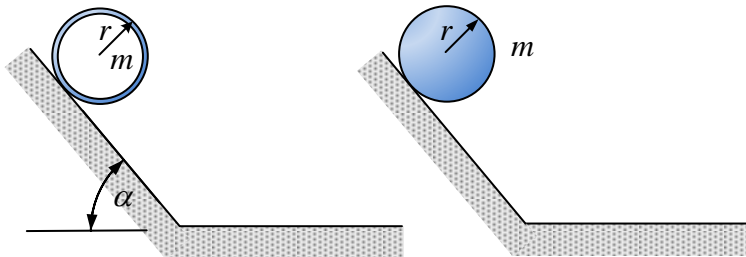
Dodając następnie stronami i mnożąc przez $\frac{2}{3}$ otrzymujemy:

$$\ddot{x} = \frac{4}{3}F$$

Na podstawie równania więzu możemy też wyznaczyć przyspieszenie kątowe:

1 Zadanie

Wyprowadź różniczkowe równania ruchu oraz zapisz kinematyczne równania więzów dla układu przedstawionego na poniższym rysunku. Która z brył stoczy się szybciej z równi pochyłej?

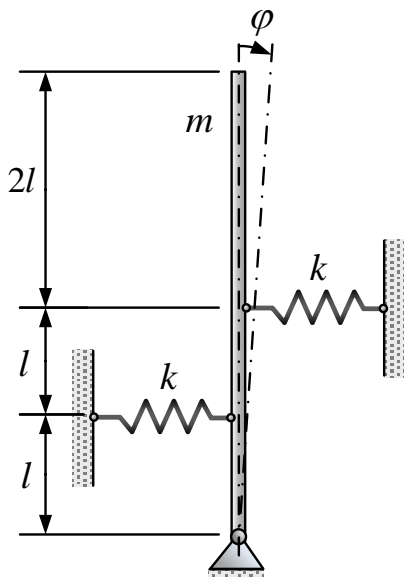


2 Zadanie

Pręt o masie m i długości $4l$ może wykonywać niewielkie obroty w płaszczyźnie pionowej. Do pręta zamocowano dwie sprężyny o sztywności k . Wyznacz różniczkowe równania ruchu przedstawionego układu.

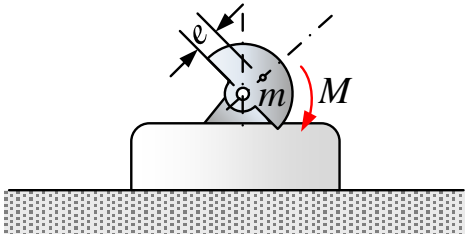
Dane: m, k, l

Szukane: równanie różniczkowe ruchu



3 Zadanie

Wibrator mechaniczny o masie m i promieniu bezwładności ρ jest napędzany stałym momentem M . Wyznacz równanie ruchu wibratora, który przymocowano do sztywnego fundamentu. Środek masy wibratora jest oddalony od osi obrotu o e .

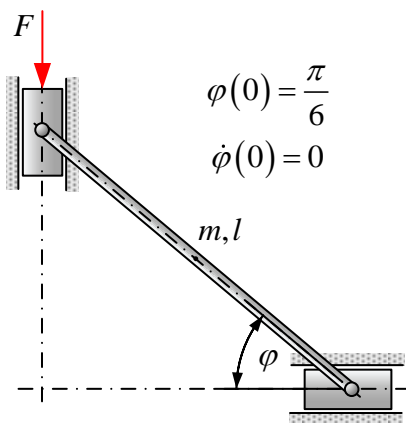


Dane: m, ρ, M', e

Szukane: $\varphi(t)$

4 Zadanie

Pręt o masie m i długości l jest przymocowany przegubowo do nieważkich suwaków. Wyznacz równanie ruchu pręta $\varphi(t)$ przy założeniu, że porusza się on w płaszczyźnie poziomej pod wpływem siły F przyłożonej do jednego z suwaków (jak na rysunku).



Dane: $m, l, F, \varphi(0), \dot{\varphi}(0)$

Szukane: $\varphi(t)$

5 Zadanie

Po obu stronach nieważkiego cięgna przewleczonego przez nieważki krążek zamocowano jednakowe masy m . Oblicz:

- wartość siły naciągu liny
- wartość siły naciągu liny po dołożeniu dodatkowej masy m po jednej stronie
- przyspieszenie mas oraz naciąg lin po obu stronach jeśli dołożymy dodatkową masę po jednej stronie oraz uznamy, że krążek jest wałki o masie m .

Dane: m, R

Szukane: S, a

