

---

# Dynamika punktu materialnego nieswobodnego

---

dr inż. Sebastian Pakuła

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

e-mail: [spakula@agh.edu.pl](mailto:spakula@agh.edu.pl)  
<http://home.agh.edu.pl/~spakula/>

## Wprowadzenie

Punkt nieswobodny to taki, którego ruch ograniczony jest więzami. Wyróżniamy różne rodzaje więzów: podpory nieprzesuwne (przeguby walcowe / kuliste), podpory przesuwne, cięgna, podłoże itp.. Z więzami zawsze są związane siły, które nazywamy reakcjami. Niekiedy siły te mogą wpływać na ruch punktu np. siły tarcia, które zależne są od siły reakcji podłoża (nacisku) wg równania  $T = \mu N$ .

## 1 Zadanie

Sito wykonuje drgania harmoniczne o amplitudzie  $b$ . Przy jakiej częstotliwości drgań sita, grudki (punkty materialne) leżące na sicie będą od niego odrywane i podrzucane do góry?

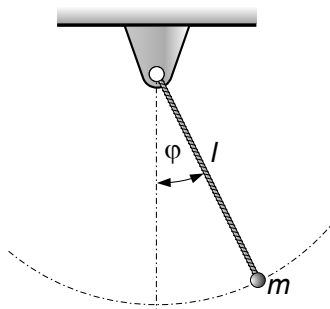
## 2 Zadanie

Ciało o ciężarze  $G = 20N$  zawieszono na linie o długości  $l = 1m$  uzyskało wskutek uderzenia prędkość poziomą  $v_0 = 5m/s$ . Znaleźć siłę w linie bezpośrednio po uderzeniu. Przyspieszenie ziemskie  $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$ .

Odp.:  $S = 70,96N$

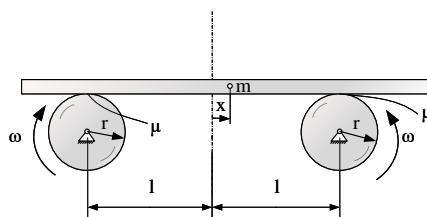
## 3 Zadanie

Wyznaczyć równanie ruchu wahadła matematycznego  $\varphi(t)$  oraz napięcie nici  $N$  o długość  $l$ . Masa wahadła wynosi  $m$ .



## 4 Zadanie

Maszyna Zajcewa jest to urządzenie do badania współczynnika tarcia ślizgowego. Jest ona zbudowana z dwóch krążków, oddalonych od siebie na odległość  $2l$ , obracających przeciwnie do siebie ze stałą prędkością kątową  $\omega$ . Po uruchomieniu urządzenia, płyta położona na bębnach zaczyna drgać na skutek oddziaływania sił tarcia. Przy założeniu, że w chwili początkowej belka była usytuowana na krążkach niesymetrycznie o  $x_0$  względem osi symetrii, wyprowadź jej równanie ruchu  $x(t)$ . Wiedząc, że okres drgań wynosi  $T$  oblicz współczynnik tarcia  $\mu$ .



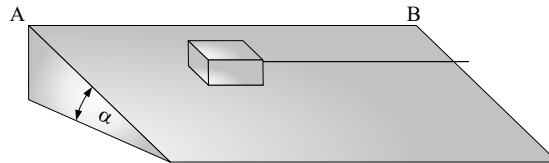
### 5 Zadanie

Punkt materialny  $M$  wznosi się po szorstkiej równi nachylonej pod kątem  $\alpha$ . W chwili początkowej prędkość punktu wynosi  $15 \frac{m}{s}$ , współczynnik tarcia wynosi  $\mu = 0,1$ , kąt  $\alpha = 30^\circ$ . Jaką drogę przebędzie punkt po równi do chwili zatrzymania się? W jakim czasie punkt przebędzie tę drogę?

$$\text{Odp.: } s = \frac{v_0^2}{2g(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)} = 19,56m, s = \frac{v_0}{g(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)} = 2,61m$$

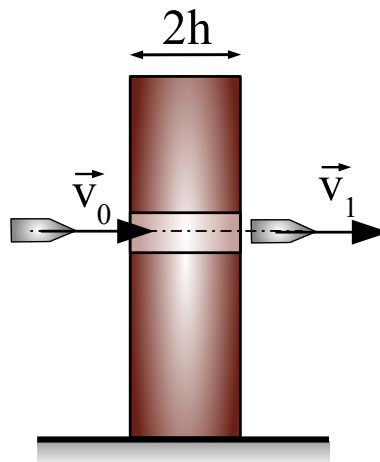
### 6 Zadanie

Na szorstkiej pochyłej płaszczyźnie porusza się ciało o masie  $M$ , które jest stale ciągnięte przez nąć w kierunku poziomym równoległym do  $\vec{AB}$ . Od pewnej chwili ruch ciała jest prostoliniowy i jednostajny, a z dwóch wzajemnie prostopadłych prędkości ta, która jest równoległa do  $\vec{AB}$ , wynosi  $12 \text{ cm/s}$ . Oblicz drugą składową prędkości, a także siłę  $S$  w nici dla następujących danych:  $\tan \alpha = \frac{1}{30}$  – nachylenie płaszczyzny,  $\mu = 0,1$  – współczynnik tarcia,  $M = 30 \text{ kg}$  – masa.



### 7 Zadanie

Pocisk o masie  $m$ , lecący z prędkością  $v_0$  przebija mur grubości  $2h$ . Mur stawia opór  $R = kv + \mu$ , gdzie  $k, \mu$  – stałe, większe od 0. Zaniedbując wpływ siły ciężkości pocisku, oblicz prędkość pocisku po przebicciu muru  $v_1$ . Jak gruby musiałby być mur, aby pocisk w nim utknął?



### 8 Zadanie

Kamień  $M$  znajdujący się w wierzchołku  $A$  gładkiej kopuły w kształcie półkuli o promieniu  $R$  otrzymał prędkość początkową  $v_0$ . W jakim miejscu kamień oderwie się od kopuły? Dla jakiej wartości  $v_0$  kamień oderwie się od kopuły od razu w chwili początkowej? Opór ruchu kamienia po kopule pominąć.

$$\text{Odp.: } \varphi = \arccos \left( \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR} \right), v_0 \geq \sqrt{gR}$$