
Dynamika punktu materialnego swobodnego

dr inż. Sebastian Pakuła

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

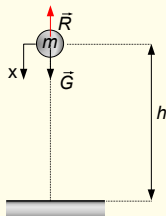
e-mail: spakula@agh.edu.pl
<http://home.agh.edu.pl/~spakula/>

Wprowadzenie

Dział ten dotyczy analizy ruchu i sił działających na punkt materialny. W niektórych przypadkach bryłę można zredukować do punktu materialnego w środku masy. Dotyczy to brył, które poruszają się ruchem postępowym. Dynamika punktu opiera się o drugą zasadę dynamiki Newtona. Punkt swobodny to taki, którego ruch nie jest ograniczony więzami. Punkt może swobodnie przemieszczać się w każdym kierunku. Przykładowe źródła sił oddziałujących na punkt to: siły grawitacji, siły oporów oraz oddziaływania innych punktów materialnych.

Przykład

Ciało o masie m opada w polu sił grawitacyjnych z wysokości h_0 bez prędkości początkowej. Na ciało to działa siła oporu powietrza proporcjonalna do kwadratu prędkości $R = \alpha v^2$. Wyznacz równanie prędkości ciała w funkcji jego wysokości. Jaka prędkość ma kula w momencie uderzenia o ziemię?



Rozwiązanie:

Początek układu współrzędnych x ustalono w początkowym położeniu ciała. Dla tak przyjętego układu współrzędnych zapisujemy różniczkowe równanie ruchu (*II zasada dynamiki Newtona*).

$$m\ddot{x} = G - R \quad (1)$$

gdzie $G=mg$ - ciężar ciała. Po podstawieniu do równania 1 otrzymujemy:

$$m\ddot{x} = mg - \alpha v^2 \quad (2)$$

$$\ddot{x} = g - kv^2 \quad (3)$$

gdzie $k = \frac{\alpha}{m}$. Z uwagi na to, że prędkość zmienia się w czasie i jest to funkcja nieznana, nie możemy poprostu całkować tego równania po czasie. W związku z tym stosujemy technikę rozdzielania zmiennych dokonując wcześniej odpowiedniego podstawienia za przyspieszenie $\ddot{x}$.

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} \frac{dx}{dx} = \frac{dx}{dt} \frac{dv}{dx} = v \frac{dv}{dx} \quad (4)$$

Równanie 4 podstawiamy do 3.

$$v \frac{dv}{dx} = g - kv^2 \quad (5)$$

Następnie rozdzielamy zmienne.

$$\frac{v}{g - kv^2} dv = dx \quad (6)$$

Całkujemy obustronnie.

$$\int \frac{v}{g - kv^2} dv = \int dx \quad (7)$$

Funkcja pod całką z lewej strony wyrażenia 7 jest ilorazem wielomianów odpowiednio pierwszego i drugiego rzędu. W takich sytuacjach należy sprawdzić czy licznik nie jest przypadkiem

pochodną mianownika. Jeśli tak, to rozwiązaniem jest logarytm naturalny mianownika. Doprowadzamy zatem licznik do takiej postaci, aby był pochodną mianownika.

$$-\frac{1}{2k} \int \frac{-2kv}{g - kv^2} dv = \int dx \quad (8)$$

$$-\frac{1}{2k} \ln |g - kv^2| = x + C \quad (9)$$

Stałą C wyznaczamy z warunków początkowych wiedząc, że $v = 0$ dla $x = 0$. Wartości te podstawiamy do równania 9.

$$-\frac{1}{2k} \ln g = C \quad (10)$$

Obliczoną stałą wstawiamy do równania 9 i przenosimy na lewą stronę.

$$-\frac{1}{2k} \ln |g - kv^2| + \frac{1}{2k} \ln g = x \quad (11)$$

$$-\frac{1}{2k} \ln \left(\frac{g - kv^2}{g} \right) = x \quad (12)$$

$$\ln \left(\frac{g - kv^2}{g} \right) = -2kx \quad (13)$$

$$\frac{g - kv^2}{g} = e^{-2kx} \quad (14)$$

$$g - kv^2 = ge^{-2kx} \quad (15)$$

$$v(x) = \sqrt{\frac{g}{k} (1 - e^{-2kx})} \quad (16)$$

Aby wyznaczyć prędkość ciała w momencie uderzenia o ziemię, wystarczy za zmienną x podstawić h .

$$v(h) = \sqrt{\frac{g}{k} (1 - e^{-2kh})} \quad (17)$$

1 Zadanie

Przy wystrzale z działa pocisk opuszcza lufę z prędkością $v = 570 \text{ m/s}$. Masa pocisku wynosi $m = 6 \text{ kg}$. Jaki jest średni nacisk gazów prochowych, jeżeli pocisk przebywa wewnątrz działa drogę $s = 2 \text{ m}$. Po jakim czasie pocisk opuści lufę działa przyjmując, że nacisk gazów jest niezmienny.

2 Zadanie

Po jakim czasie i na jakim odcinku może zatrzymać się w skutek hamowania wagon tramwajowy jadący po poziomym torze z prędkością $v_0 = 36 \text{ km/h}$, jeżeli opór ruchu powstający przy hamowaniu wynosi 30 kN na tonę ciężaru wagonu. (przyjmij, że $1 \text{ T} = 1 \text{ kN}$)

3 Zadanie

Punkt materialny o masie m porusza się prostoliniowo pod działaniem siły zmieniającej się według wzoru $F = F_0 \cos(\omega t)$, gdzie F_0 i ω są stałe. Przyjmij, że w chwili początkowej punkt ma prędkość $\dot{x}(0) = v_0$ i znajduje się w początku układu współrzędnych $x(0) = 0$. Znaleźć równanie ruchu punktu.

Odp.: $x(t) = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) + v_0 t$

4 Zadanie

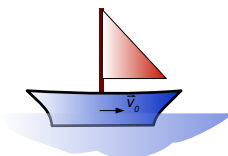
Ciało o ciężarze $2kG$ rzucono pionowo do góry z prędkością $20m/s$ pokonuje opór powietrza wprost proporcjonalny do prędkości i przy prędkości $v = 1m/s$ wynosi w kilogramach-siła $0,04$; $g = 9,8m/s^2$. Obliczyć, po ilu sekundach ciało osiągnie najwyższe położenie.
(przeliczyć stare jednostki $[kG]$, $[T]$ na nowe $[N]$)

5 Zadanie

Motorniczy tramwajowy wyłączając stopniowo opory w obwodzie elektrycznym silnika, zwiększa jego moc tak, że siła pociągowa wzrasta od zera proporcjonalnie do czasu o $120kG$ w ciągu każdej sekundy. Znaleźć równanie drogi s wagonu dla następujących danych. Ciężar wagonu $10T$, opór jazdy jest stały i wynosi $0,2T$, a prędkość początkowa równa jest zeru.
(przeliczyć stare jednostki $[kG]$, $[T]$ na nowe $[N]$)

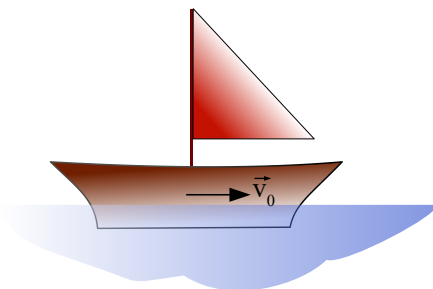
6 Zadanie

Łódź o masie m porusza się z prędkością początkową v_0 . Działa na nią siła oporu wody proporcjonalna do prędkości wg równania $R = kv$ gdzie $k = const$. Oblicz jaką drogę przebędzie łódź do momentu gdy zwolni do połowy prędkości początkowej.



7 Zadanie

Po jeziorze płynie łódka z człowiekiem o łącznej masie m , której nadano prędkość początkową v_0 . Działa na nią siła oporu wody $R = k\sqrt{v}$. Po jakim czasie prędkość łódki zmaleje czterokrotnie? Jaką drogę przebędzie łódka w tym czasie?



8 Zadanie

Samolot zaczyna nurkować bez pionowej prędkości początkowej. Opór powierza jest proporcjonalny do kwadratu prędkości samolotu. Znaleźć zależność między chwilową prędkością pionową a przebytą drogą oraz maksymalną prędkością nurkowania.
A więc szukane jest $v(x)$ lub $x(v)$ oraz v_{max} , czyli v przy $x \rightarrow \infty$. Rozważamy pionową składową ruchu.

9 Zadanie

Samolot leci poziomo. Opór powietrza jest proporcjonalny do kwadratu prędkości i przy prędkości $1m/s$ wynosi $0,005kG$. Stała siła ciągu śmigła wynosi $3080kG$ i tworzy z kierunkiem lotu kąt 10° . Wyznacz największą prędkość samolotu.

Odp: $v_{max} = 246 \frac{m}{s}$

10 Zadanie

Znaleźć największą prędkość spadania kuli o masie $10kg$ i promieniu $r = 8cm$ przyjmując, że opór powietrza wyraża się wzorem $R = k\sigma v^2$, gdzie v oznacza prędkość spadania, σ – pole rzutu spadającego ciała na płaszczyznę prostopadłą do kierunku jego ruchu, k – współczynnik oporu zależny od kształtu ciała i przyjmujący dla kuli wartość $0,024Ns^2/m^4$.

11 Zadanie

Okręt płynąc pokonuje opór wody proporcjonalny do kwadratu prędkości i wynoszący $0,12[T]$ przy prędkości $1m/s$. Siła pociągowa śruby skierowana jest zgodnie z kierunkiem ruchu i zmienia się według prawa $T(v) = T_0(1 - \frac{v}{v_s})$, gdzie $T_0 = 120[T]$, a $v_s = 30m/s$. Wyznacz równanie prędkości w czasie oraz największą prędkość, jaką okręt może osiągnąć.

Podpowiedź: Aby scałkować uzyskane wyrażenie należy iloczyn wyrazów w mianowniku zastąpić sumą wg. $\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$

12 Zadanie

Cząstka o masie m mająca ładunek elektryczny e znajduje się w jednorodnym polu elektrycznym o zmiennym natężeniu $E = Ak \sin kt$, gdzie A i k są stałe. Wyznaczyć ruch cząstki, jeżeli wiadomo, że w polu elektrycznym działa na nią siła $F = eE$ skierowana zgodnie z wektorem natężenia pola E . Wpływ siły ciężkości pominąć. Położenie początkowe cząstki przyjąć za początek układu współrzędnych. Prędkość początkowa cząstki wynosi zero.

Odp.: $x(t) = \frac{eA}{m} (t - \frac{1}{k} \sin kt)$

13 Zadanie

Ciało o ciężarze P rzucone z prędkością początkową v_0 pod kątem α do poziomu porusza się pod działaniem siły ciężkości i oporu powietrza R . Obliczyć największe wzniesienie h ciała nad poziom początkowego położenia przyjmując, że opór powietrza jest proporcjonalny do prędkości: $R = kPv$.

Odp.: $h = \frac{v_0 \sin \alpha}{gk} - \frac{1}{gk^2} \ln(1 + kv_0 \sin \alpha)$

14 Zadanie

Zachowując warunki poprzedniego zadania podaj równania ruchu punktu.

Odp.: $x = \frac{v_0 \cos \alpha}{gk} (1 - e^{-kgt})$, $y = \frac{1}{gk} (v_0 \sin \alpha + \frac{1}{k}) (1 - e^{-kgt}) - \frac{t}{k}$

15 Zadanie

Określić ruch kulki w prostym kanale przechodzącym przez środek Ziemi, jeżeli wiadomo, że siła przyciągania ziemskiego jest proporcjonalna do odległości poruszającego się punktu od środka Ziemi i skierowana do tego środka. Kulka rozpoczyna ruch w kanale z powierzchni Ziemi bez prędkości początkowej. Znaleźć także prędkość kulki w chwili, gdy mija ona środek Ziemi i czas potrzebny na dotarcie do niego. Promień Ziemi wynosi $R = 6400km$, a przyspieszenie na powierzchni Ziemi $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$.

Odp.: $x = R \cos \sqrt{\frac{g}{R}}t$; $v = 7924 \frac{m}{s}$; $T = 21,1min$