dr inż. Sebastian Pakuła

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

e-mail: spakula@agh.edu.pl
http://home.agh.edu.pl/~spakula/

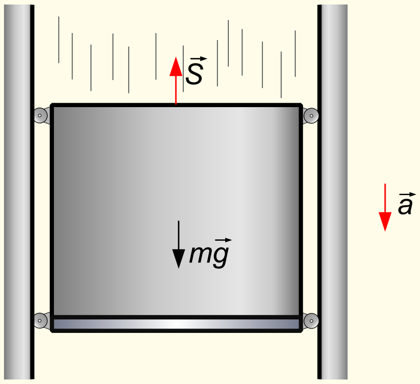
Wprowadzenie

Wcześniejszy kurs **„Mechaniki I”** dzieli się na dwa obszary: *Statyka* i *Kinematyka*. Pierwszy z nich dotyczy zagadnień układów statycznych - tj. nieruchomych. Głównym zadaniem statyki jest obliczanie sił reakcji, sił równoważących, położeń równowagi. Kinematyka natomiast zajmuje się opisem stutku ruchu. Do zadań kinematyki należy najcześciej określenie funkcji (zależności) między ruchami poszczególnych punktów układu. Chechą charakterystyczną w kinematyce jest brak m.in. sił oraz mas. Kinematyka w odróżnieniu od dynamiki nie bada przyczyny ruchu. Dynamika jest dzidziną nauki łączącą ruch układu z oddziałujacymi na niego siłami, dlatego kurs **Mechaniki II** rozpoczynamy od ugruntowania wiedzy, głównie z zakresu kinematyki. Poniżej przygotwano zadania do samodzielnego rozwiązania bazując na wiedzy uzyskanej ze wcześniejszego kursu Mechanika I.

Przykład

Winda o masie $280kg$ opuszcza się w szybie ruchem jednostajnie przyśpieszonym i przebywa w początkowych $10s$ drogę $35m$. Wyznacz napięcie liny, na której wisi winda.

Rozwiązanie:
Na początek należy zbudować model fizyczny (schemat, rysunki, siły).



Punktem wyjścia większości zadań z dynamiki jest równanie z drugiej zasady dynamiki Newtona.

$$m\vec{a} = \sum \vec{P}_i \tag{1}$$

Zastosujmy to równanie w omawianym przypadku.

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{S} \tag{2}$$

Winda porusza się ruchem prostoliniowym, więc zapiszemy równanie 2 skalarnie.

$$ma = mg - S \tag{3}$$

Otrzymaliśmy równanie ruchu, z którego możemy obliczyć przyspieszenie a.

$$a = g - \frac{S}{m} \tag{4}$$

Chcąc uzyskać równanie drogi w funkcji czasu, należy powyższe równanie podwójnie scałkować po czasie. Po pierwszym całkowaniu przyspieszenia otrzymamy równanie prędkości w funkcji czasu $v(t)$.

$$v = \int adt = \int g - \frac{S}{m} dt \tag{5}$$

$$v = gt - \frac{S}{m} t + C \tag{6}$$

Po jednokrotnym całkowaniu przyspieszenia otrzymaliśmy równanie prędkości ze stałą całkowania C. Całkowania dokonaliśmy przy założeniu, że siła napięcia linki S jest stała (tzn. niezmienna w czasie). Stałą C obliczymy z warunków początkowych. Jeśli w treści zadania, nie ma informacji na temat prędkości w chwili początkowej przyjmuje się ją jako zero. Dla uogólnienia przypadków załóżmy, że prędkość początkowa (czyli w chwili $t = 0$) wynosi v_0. Często zapisujemy to w postaci $v(0) = v_0$. Podstawmy do równania prędkości $v = v_0$, a za czas $t = 0$.

$$v_0 = g0 - \frac{S}{m} 0 + C \tag{7}$$

$$C = v_0 \tag{8}$$

Ostatecznie równanie prędkości wygląda następująco:

$$v(t) = (g - \frac{S}{m})t + v_0 \tag{9}$$

Dokonajmy teraz całkowania prędkości aby uzyskać funkcję drogi od czasu. Otrzymujemy nastepujace równanie:

$$x(t) = \int vdt = \int (g - \frac{S}{m})t + v_0 dt \tag{10}$$

$$x(t) = (g - \frac{S}{m})\frac{t^2}{2} + v_0 t + D \tag{11}$$

Podobnie jak wcześiej, stałą całkowania D obliczamy z warunków początkowych. Tylko jakie jest początkowe położenie windy $x(0) =?$. To zalezy od tego gdzie znajduje się początek układu współrzędnych.Jeśli w treści zadania nie podano tego wprost, układ współrzedny można ustalić dowolnie. Dla wygody ustawiamy początek układu współrzędnych w środku masy windy w chwili początkowej. W takim wypadku $x(0) = 0$. Podstawmy $x = 0$, i $t = 0$ do równania 11.

$$0 = (g - \frac{S}{m})\frac{0^2}{2} + v_0 0 + D \tag{12}$$

$$D = 0 \tag{13}$$

Obliczoną stałą podstawiy do równania 11 i otrzymuje ostateczną funkcję drogi od czasu.

$$x(t) = (g - \frac{S}{m})\frac{t^2}{2} + v_0 t \tag{14}$$

Warto zauważyć, że równanie 14 odpowiada równaniu drogi w ruchu jednostajnie przyspieszonym wg wzoru:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \tag{15}$$

Ta prawidłowość występuje tylko wtedy gdy siła napięcia linki jest stała. Gdyby siła S zmieniała się w czasie, wówczas również przyspieszenie zmienia się w czasie.
Znając równanie drogi podstawmy wartości znanych parametrów. Wiemy, że winda po 10 sekundach przemieściła się o 35m, a więc: $x(10) = 35m$. (czyt. współrzędna określająca połozenie

1 Zadanie

Ciężarówka przemieszcza się po prostej drodze z prędkością $20km/h$, następnie przyspiesza do $120km/h$ w ciągu $15s$. Jeżeli przyspieszenie jest stałe, oblicz drogę jaką przebyła ciężarówka w czasie rozpędzania.

2 Zadanie

Z wieży o wysokości $h = 12{,}5m$ rzucono pionowo w dół piłkę nadając jej początkową prędkość $v_0 = 4{,}5m/s$. Oblicz prędkość piłki w momencie uderzenia o ziemię.

środka masy windy w dziesiątej sekundzie wynosiła 35m). Podstawmy tą wartość do równania drogi 14 , oczywiście przyjmując, że $v0 = 0$.

$$35 = (g - \frac{S}{m})\frac{10^2}{2} \tag{16}$$

$$0{,}7 = g - \frac{S}{m} \tag{17}$$

$$S = (g - 0{,}7)m \tag{18}$$

$$S = (9{,}81 - 0{,}7)280 \tag{19}$$

$$S = 2550,8 \tag{20}$$

Obliczania powyższe doprowadziły nas do odpowiedzi na pytanie, jaka jest siła naciągu liny podtrzymującej windę. Rodzi się pytanie: *W jakich jednostkach jest wyrażona uzyskana wartość siły?* Skoro wszystkie wielkości podczas oblicze, miały wymiar jednostek z podstawowego układu jednostek miar *SI*, to spodziewamy się, że wynik również zyskamy w jednostkach podstawowych. Wartość siły powinna mieć wymiar $[N = kg\frac{m}{s^2}]$ – Newton. Do sprawdzenia przeanalizujmy równanie 18. Symbol g – oznacza przyspieszenie ziemskie wyrażone w $\frac{m}{s^2}$, m – to masa wyrażona w kg. Aby wyrażenie w nawiasie miało sens fizyczny to *odjemna* i *odjemnik* muszą być wyrażone w tych samych jednostkach. Oczekujemy więc,że wartość 0,7 jest wyrażona w $\frac{m}{s^2}$. Sprawdźmy! 0,7 powstało przez pomnożenie $35m$ przez 2 i podzielenie przez $(10s)^2$, czyli:

$$\frac{35m \cdot 2}{10^2 s^2} = \frac{70}{100}\frac{m}{s^2} = 0{,}7\frac{m}{s^2} \tag{21}$$

Więc jednostki się zgadzają. To jedna z najprostszych i najefektywniejszych metod autokorekty w zadaniach. **Sprawdzanie jednostek!**. Ostateczną odpowiedzia jest więc: $S = 2550{,}8N$, co odpowiada ciężarowi $S = \frac{2550{,}8}{9{,}81}kG = 260kG$. *(kG -)czyt. kilogram-siła).*

Zadanie!
Czym różni się masa $260kg$ od ciężaru $260kG$? Wyjaśnij!

3 Zadanie

Samochód przemieszcza się z prędkością $70\frac{km}{h}$ z przyspieszeniem $6000\frac{km}{h^2}$ wzdłuż prostej drogi. Jak długo zajmie osiągnięcie prędkości $120\frac{km}{h}$ oraz jaki dystans przebędzie w tym czasie?

4 Zadanie

Pociąg przemieszcza się z prędkością wzdłuż linii prostej wg równania $v = 20(1 - e^{-t})\frac{m}{s}$, gdzie t to czas wyrażony w sekundach. Oblicz odległość przebytą przez pociąg w ciągu trzech sekund i przyspieszenie jakie miał w tym czasie.

5 Zadanie

Cząstka rozpoczyna ruch w linii prostej pod wpływem przyspieszenia $a = (2t - 6)\frac{m}{s^2}$, gdzie t jest czasem w sekundach. Jaka jest prędkość cząstki w czasie $t = 6s$ i jakie jest jej położenie w chwili $t = 11s$?

6 Zadanie

Cząstka początkowo znajduje się w środku układu współrzędnych i porusza się wzdłuż linii prostej przez ciecz, w której prędkość cząstki zdefiniowana jest przez równanie $v = 1{,}8(1 - e^{-0{,}3t})\frac{m}{s}$, gdzie t jest wyrażone w sekundach. Oblicz przemieszczenie cząstki w ciągu pierwszych 3 sekund.

7 Zadanie

Kamień spada do szybu bez prędkości początkowej. Dźwięk wywołany uderzeniem kamienia o dno został usłyszany po $6{,}5s$. od początku ruchu. Prędkość dźwięku wynosi $340\frac{m}{s}$. Znaleźć głębokość szybu.