Punkt materialny

dr inż. Sebastian Pakuła

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

e-mail: spakula@agh.edu.pl
http://home.agh.edu.pl/~spakula/

Przydatne wzory

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \tag{1}$$
$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \tag{2}$$
$$a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} \tag{3}$$
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \tag{4}$$
$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \tag{5}$$
$$\tag{6}$$

Przykład

Na podstawie danego równania ruchu wyznacz równanie prędkości $v(t)$, przyspieszenia stycznego $a_\tau(t)$, przyspieszenia normalnego $a_n(t)$, przyspieszenia całkowitego a, tor punktu oraz promień krzywizny toru $\rho(t)$. Ponadto wyznacz wartości prędkości, przyśpieszeń oraz krzywiznę toru po drugiej sekundzie ruchu $t_k = 2$.

$$\begin{cases} x(t) & = t - 2 \quad [m] \\ y(t) & = -t^2 + 4t \quad [m] \end{cases}$$

Rozwiązanie

Przedstawiony układ równań opisuje położenie punktu w dowolnej chwili t na płaszczyźnie xy.

Prędkość punktu v: Wyznaczmy najpierw składowe prędkości różniczkując równania ruchu po czasie.

$$\begin{cases} v_x(t) & = \frac{dx}{dt} = 1 \\ v_y(t) & = \frac{dy}{dt} = -2t \end{cases}$$

Stąd, szybkość (wartość prędkości całkowitej) wyznaczamy z twierdzenia Pitagorasa.

$$v\left(t\right) = \sqrt{v_x^2\left(t\right) + v_y^2\left(t\right)} = \sqrt{1^2 + \left(4 - 2t\right)^2}$$

$$v\left(2\right) = \sqrt{1 + \left(4 - 2 \cdot 2\right)^2} = 1\frac{m}{s}$$

Przyspieszenie punktu a: Składowe przyspieszeń wyznaczamy różniczkując składowe prędkości.

$$\begin{cases} a_x(t) & = \frac{v_x}{dt} = 0 \\ a_y(t) & = \frac{v_y}{dt} = -2 \end{cases}$$

Podobnie jak szybkość, wartość przyspieszenia obliczamy korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$$a\left(t\right) = \sqrt{a_x^2\left(t\right) + a_y^2\left(t\right)} = 2\frac{m}{s^2}$$

$$a\left(2\right) = 2\frac{m}{s^2}$$

Przyspieszenie styczne a_τ **-** jest pochodną szybkości i mówi o szybkości zmiany wartości prędkości.

$$a_\tau(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{1+(4-2t)^2}} \cdot 2(4-2t)\cdot(-2) = \frac{4t-8}{\sqrt{1+(4-2t)^2}}$$

$$a_\tau(2) = 0$$

można także skorzystać ze wzoru 3.

Przyspieszenie normalne a_n **-** odpowiada za zmianę kierunku wektora prędkości i pojawia się zawsze w ruchu krzywoliniowym. W naszym przypadku nie promienia krzywizny. W związku z tym, przyspieszenie normalne a_n obliczymy po przekształceniu wzoru 5.

$$a_n(t) = \sqrt{a^2(t) - a_\tau^2(t)}$$

$$a_n(t) = \sqrt{2^2 - \frac{16(t-2)^2}{1+(4-2t)^2}}$$

$$a_n(2) = 2\frac{m}{s^2}$$

Tor punktu wyprowadzimy z równań ruchu, wyrugowując z nich czas t. Możemy skorzystać z metody podstawiania, wyznaczając z jednego równania t i podstawiając do drugiego równania.

$$\begin{cases} t &= x+2 \\ y &= -(x+2)^2 + 4(x+2) \end{cases}$$

$y = -x^2 + 4$ – tor punktu.

Promień krzywizny - wyznaczymy po przekształceniu wzoru 1.

$$\rho(t) = \frac{v^2}{a_n} = \frac{1^2 + (4-2t)^2}{\sqrt{4 - \frac{16(t-2)^2}{1+(4-2t)^2}}}$$

$$\rho(2) = \frac{1}{2}m$$

ZADANIA:

Na podstawie danego równania ruchu wyznacz równanie prędkości $v(t)$, przyspieszenia stycznego a_τ, przyspieszenia normalnego a_n, przyspieszenia całkowitego a, tor punktu oraz krzywiznę toru ρ. Ponadto wyznacz wartości prędkości, przyśpieszeń oraz krzywiznę toru po drugiej sekundzie ruchu $t_k = 2$.

1 Zadanie

$$\begin{cases} x(t) &= 4\sin(t) \quad [m] \\ y(t) &= 4\cos(t) \quad [m] \end{cases}$$

Podpowiedź: do wyznaczenia toru posłużyć się jedynką trygonometryczną.

2 Zadanie

Podpowiedź: ruch prostoliniowy

$$\begin{cases} x(t) &= 0 & [m] \\ y(t) &= 7t^2 + 4t + 9 & [m] \end{cases}$$

3 Zadanie

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{36t+9}{6} & [m] \\ y(t) &= 12e^{-2t} & [m] \end{cases}$$

4 Zadanie

Podpowiedź: równaniem toru jest elipsa.

$$\begin{cases} x(t) &= 12\sin(2t) & [m] \\ y(t) &= 3\cos(2t) & [m] \end{cases}$$

5 Zadanie

Bez wyznaczania toru.

$$\begin{cases} x(t) &= 2e^{4t}\sin(t) & [m] \\ y(t) &= cos^2(t) & [m] \end{cases}$$

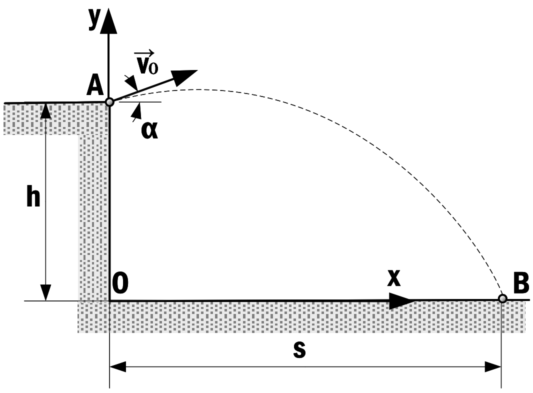
6 Zadanie

Bez wyznaczania toru.

$$\begin{cases} \varphi(t) &= 4t & [rad] \\ r(t) &= 2t & [m] \end{cases}$$

7 Zadanie

Punkt został wyrzucony z prędkością v_0 ze wzniesienia o wysokości h pod kątem α. Wyznacz: zasięg rzutu s, prędkość v_B, przyspieszenie styczne $a_{B\tau}$ oraz normalne a_{Bn}, promień krzywizny toru ρ_B w momencie uderzenia o ziemię.



Dane:

$h = 6m$

$v_0 = 10\frac{m}{s}$

$\alpha = 30°$

Szukamy:

$s =?$

$v_B =?$

$a_{B\tau} =?$

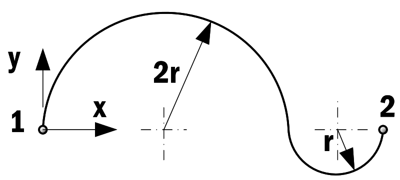
$a_{Bn} =?$

$\rho_B =?$

8 Zadanie

Dwa punkty 1 i 2 poruszają się po torze o promieniu r oraz $2r$ ruchami jednostajnie przyspieszonymi o wartości przyspieszenia odpowiednio a_1 i a_2. Punkty startują z dwóch przeciwnych końców toru jak na rysunku.

Oblicz czas t_s, po którym punkty się zderzą, współrzędne x i y miejsca spotkania oraz odpowiedz jak duże musiałby być przyspieszenie a_2^*, żeby zderzenie nastąpiło przy $x_1^* = 2r$.



Dane:

$a_1 = 4\frac{m}{s^2}$

$a_2 = 5\frac{m}{s^2}$

$r = 2m$

Szukamy:

$t_s =?$

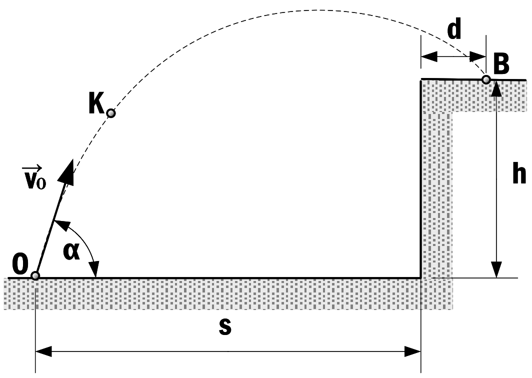
$x =?$

$y =?$

$a_2^* =?$

9 Zadanie

Kula K zostaje wystrzelona z ziemi z prędkością początkową v_0 pod kątem α i powinna wylądować na podeście, jak na ilustracji. Oblicz dystans d od krawędzi do punktu lądowania B.



Dane:

$v_0 = 12\frac{m}{s}$

$\alpha = 60°$

$s = 8m$

$h = 5m$

$g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$

Szukamy:

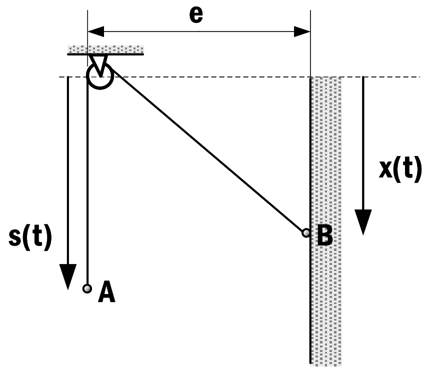
$d = ?$

Odpowiedź:

$d = 0{,}28m$

10 Zadanie

Ruch $s(t)$ punktu A jest realizowany poprzez nierozciągliwą linę oraz przesunięcie punktu B wg równania $x(t)$. Długość całkowita liny wynosi l, a wymiary rolki prowadzącej są pomijanie małe. Początkowo punktu B znajdował się na poziomie krążka (tj. $x(0) = 0$). Oblicz równania ruchu, prędkości oraz przyspieszenia punktu A.



Dane:

$l = 8m$

$e = 4m$

$x(t) = 5t^2[m]$

Szukamy:

$s(t) = ?$

$\dot{s}(t) = ?$

$\ddot{s}(t) = ?$