Redukcja przestrzennego układu sił

dr inż. Sebastian Pakuła

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

e-mail: spakula@agh.edu.pl
http://home.agh.edu.pl/~spakula/

Przydatne wzory

$$\vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{r}_{AB} \times \vec{S} \tag{1}$$

$$k = \vec{M} \circ \vec{S} \tag{2}$$

$$M_S = \frac{k}{S} \tag{3}$$

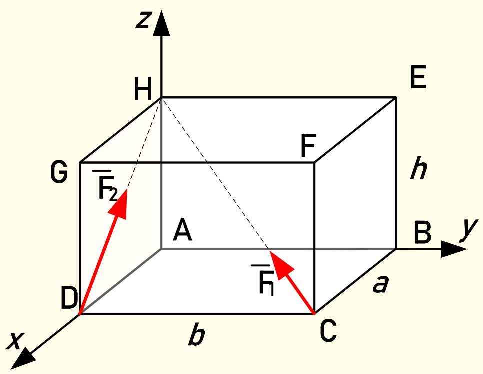
$$\vec{M}_S = M_S \cdot \frac{\vec{S}}{\left|\vec{S}\right|} \tag{4}$$

$$\frac{x - x_c}{S_x} = \frac{y - y_c}{S_y} = \frac{z - z_c}{S_z} \tag{5}$$

Przykład

Wykonaj następujące zadania z układem sił przedstawionym na rysunku.

- zredukuj układ sił do punktu A
- zredukuj układ sił do punktu B
- sprawdź poprawność obliczeń z twierdzenia o zmianie bieguna
- zredukuj układ sił do najprostszej postaci (skrętnik)
- oblicz rzut siły F_2 na odcinek HC
- oblicz moment siły F_2 względem prostej przechodzącej przez punkty AC



Dane:

$a = 3m$

$b = 9m$

$h = 6m$

$F_1 = |\vec{F}_1| = 2\sqrt{14}N$

$F_2 = |\vec{F}_2| = 2\sqrt{13}N$

Rozwiązanie

Aby rozwiązać zadanie, postępujemy wg następującej procedury:

1. Wyznaczam wektory sił

a) obliczamy jednostkowe wektory kierunkowe sił (wersory)

$$\vec{e}_1 = \frac{\overline{CH}}{|\overline{CH}|} = \frac{[-3,-9,6]}{\sqrt{(-3)^2+9^2+6^2}} = \frac{1}{3\sqrt{14}}[-3,-9,6] \tag{6}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\overline{DH}}{|\overline{DH}|} = \frac{[-3,0,6]}{\sqrt{(-3)^2+6^2}} = \frac{1}{2\sqrt{13}}[-3,0,6] \tag{7}$$

b) wyznaczam wektory sił na podstawie obliczonych wersorów

$$\vec{F}_1 = F_1 \cdot \vec{e}_1 = [-2,-6,4] \tag{8}$$

$$\vec{F}_2 = F_2 \cdot \vec{e}_2 = [-3,0,6] \tag{9}$$

2. Obliczam wektor główny

$$\vec{S} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = [-5,-6,10] \tag{10}$$

3. Obliczam moment główny względem A

$$\vec{M}_A = \overline{AC} \times \vec{F}_1 + \overline{AD} \times \vec{F}_2 \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= [3,9,0] \\ \vec{F}_1 &= [-2,-6,-4] \\ \overline{AC} \times \vec{F}_1 &= [36,-12,0] \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \overline{AD} &= [3,0,0] \\ \vec{F}_2 &= [-3,0,6] \\ \overline{AD} \times \vec{F}_2 &= [0,-18,0] \end{aligned}$$

Po zsumowaniu otrzymujemy moment główny względem A.

$$\vec{M}_A = [36,-12,0] + [0,-18,0] = [36,-30,0]$$

4. Obliczam moment główny względem B

$$\vec{M}_B = \overline{BC} \times \vec{F}_1 + \overline{BD} \times \vec{F}_2 \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= [3,0,0] \\ \vec{F}_1 &= [-2,-6,-4] \\ \overline{BC} \times \vec{F}_1 &= [0,-12-18] \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \overline{BD} &= [3,-9,0] \\ \vec{F}_2 &= [-3,0,6] \\ \overline{BD} \times \vec{F}_2 &= [-54,-18,-27] \end{aligned}$$

Po zsumowaniu otrzymujemy moment główny względem B.

$$\vec{M}_B = [0,-12-18] + [-54,-18,-27] = [-54,-30,45]$$

5. Sprawdzam obliczenia z twierdzenia o zmianie bieguna.

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \overline{BA} \times \vec{S} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \overline{BA} &= [0,-9,0] \\ \vec{S} &= [-5,-6,10] \\ \overline{BA} \times \vec{S} &= [-90,0,45] \end{aligned}$$

Po zsumowaniu otrzymujemy moment główny względem B.

$$\vec{M}_B = [36, -30, 0] + [-90, 0, 45] = [-54, -30, 45]$$

Wynik się zgadza!

6.Redukcja do najprostszej postaci. Jak widać, zależnie od tego w którym miejscu zredukujemy układ sił, moment główny będzie miał inną wartość. Istnieje takie miejsce, w którym wektor momentu $\vec{M}$ jest równoległy do wektora głównego sił $\vec{S}$.

a) niezmiennik k

$$k = \vec{S} \cdot \vec{M}_A = [-5, -6, 10] \cdot [36, -30, 0] = -5 \cdot 36 - 6 \cdot (-30) = 0 \tag{14}$$

$$k = \vec{S} \cdot \vec{M}_B = [-5, -6, 10] \cdot [-54, -30, -45] = -5 \cdot (-54) - 6 \cdot (-30) + 10 \cdot (-45) = 0 \tag{15}$$

Niezależnie od tego który moment główny weźmiemy do obliczenia niezmiennik k, to jego wartość wyjdzie zawsze taka sama. Jego niezerowa wartość oznaczałaby, że wektor momentu głównego posiada niezerową składową na kierunku wektora głównego siły $\vec{S}$. W tym wypadku $k = 0$, co oznacza, że wektor momentu głównego jest prostopadły do wektora głównego sił ($\vec{M}_A \perp \vec{S}$).

b) klasyfikacja układu: $k = 0, s \neq 0$ - układ redukuje się do wypadkowej $\vec{W} = \vec{S}$.

7. Rzut siły F_2 na odcinek HC.

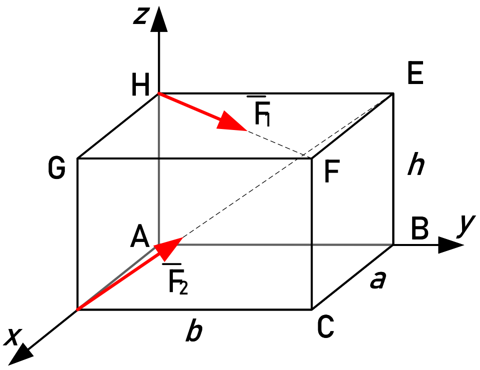
$$F_2^{'} = \vec{F}_2 \cdot \frac{\overline{HC}}{|\overline{HC}|} = [-3, 0, 6] \cdot \frac{[3, 9, -6]}{\sqrt{3^2 + 9^2 + 6^2}} = \frac{[-3, 0, 6] \cdot [3, 9, -6]}{3\sqrt{14}} = \frac{-9 - 36}{3\sqrt{14}} = -\frac{15}{\sqrt{14}}$$

8. Oblicz moment siły F_2 względem prostej przechodzącej przez punkty AC.

$$M_2^{AC} = \overline{AD} \times \vec{F}_2 \cdot \frac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|} = [0, -18, 0] \cdot \frac{[3, 9, 0]}{\sqrt{3^2 + 9^2}} = \frac{[0, -18, 0] \cdot [3, 9, 0]}{3\sqrt{10}} = -\frac{162}{3\sqrt{10}}$$

1 Zadanie

Zredukuj układ do najprostszej postaci. Wyznacz rzut momentu głównego na prostą przechodzącą przez punkty HC.



Dane:

$a = 4m$

$b = 5m$

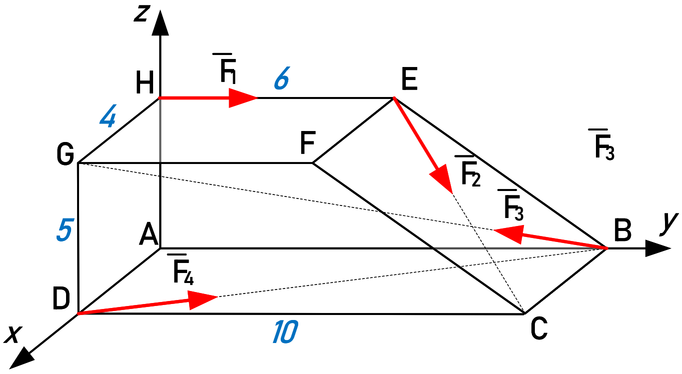
$h = 3m$

$F_1 = |\vec{F_1}| = 2\sqrt{41}N$

$F_2 = |\vec{F_2}| = 20\sqrt{2}N$

2 Zadanie

Zredukuj układ do najprostszej postaci. Wyznacz rzut wektora głównego siły na krawędź FC.



Dane: $F_1 = |\vec{F_1}| = 12N$

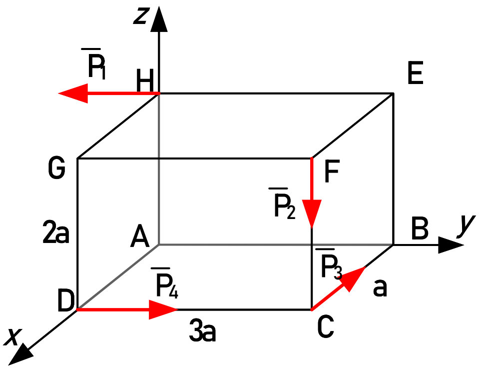
$F_2 = |\vec{F_2}| = 2\sqrt{57}N$

$F_3 = |\vec{F_3}| = \sqrt{141}N$

$F_4 = |\vec{F_4}| = 4\sqrt{29}N$

3 Zadanie

Zredukuj układ do najprostszej postaci. Wyznacz wektor momentu głównego zrzutowany na prostą przechodzącą przez punkty GE.



Dane:

$a = 2m$

$P_1 = 2N$

$P_2 = 6N$

$P_3 = 4N$

$P_4 = 4N$

4 Zadanie

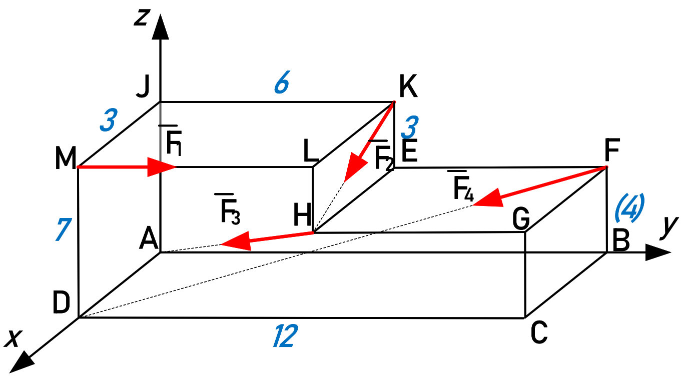
Zredukuj układ do najprostszej postaci. Wyznacz wektor momentu głównego zrzutowany na prostą z.

$F_1 = 1N$

$F_2 = 2N$

$F_3 = 3N$

$F_4 = 5N$



$A = [0,0,0]$

$D = [3,0,0]$

$F = [0,12,4]$

$K = [0,6,7]$

$H = [3,6,4]$

$M = [3,0,7]$

$L = [3,6,7]$