

---

# Środkowy przestrzenny układ sił

---

dr inż. Sebastian Pakuła

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

e-mail: [spakula@agh.edu.pl](mailto:spakula@agh.edu.pl)  
<http://home.agh.edu.pl/~spakula/>

### Warunki dowolnego przestrzennego układu sił:

Istnieje sześć warunków równowagi dowolnego przestrzennego układu sił:

$$\begin{cases} \Sigma F_{ix} = 0 \\ \Sigma F_{iy} = 0 \\ \Sigma F_{iz} = 0 \\ \Sigma M_{ix} = 0 \\ \Sigma M_{iy} = 0 \\ \Sigma M_{iz} = 0 \end{cases}$$

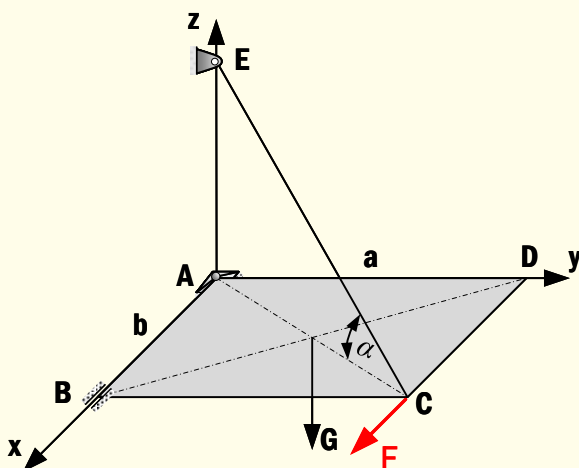
Ważna wskazówka przy liczeniu momentów sił względem osi! Siły nie dają momentów sił, jeśli są do osi równoległe lub gdy ich prosta działania przecina tę oś.

### Przykład

Płytach o wymiarach  $a \times b$  i ciężarze  $G$  jest wsparta za pomocą przegubu kulistego  $A$ , na zawiasie  $B$  oraz przy użyciu cięgna  $CE$ . Płytę obciążono siłą o wartości  $F$  przyłożoną w punkcie  $C$ , działającą wzdłuż osi  $x$ . Oblicz reakcje w przegubie kulistym  $A$ , zawiasie  $B$ , a także siłę naciągu cięgna  $|CE|$ .

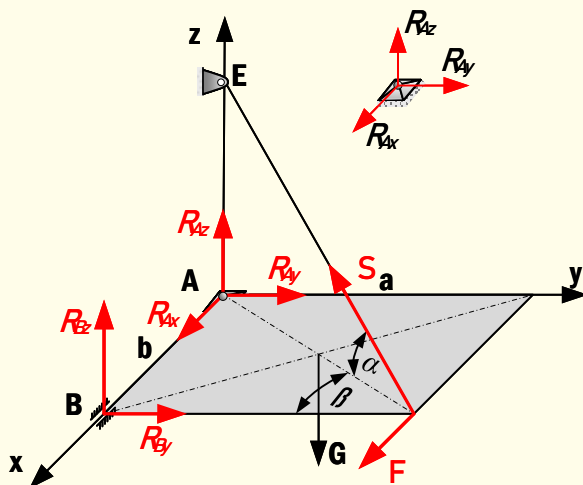
Dane:

$G, F, a, b, \alpha$



### Rozwiązanie

Układ uwalniamy od więzów. Rysujemy siły reakcji w więzach. W punkcie  $A$  występuje przegub kulisty, który zapobiega przemieszczaniu punktu  $A$  w każdym kierunku. Stąd wynikają wszystkie trzy składowe siły reakcji  $R_A$ . Układ po uwolnieniu od więzów wygląda jak na rysunku poniżej.



Przygotowujemy sobie geometrię, obliczając funkcje trygonometryczne kąta  $\beta$ .

$$\sin(\beta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos(\beta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Następnie zapisujemy warunki równowagi przestrzennego dowolnego układu sił.

$$\begin{cases} \Sigma F_{ix} = 0 \implies R_{Ax} - S \cos(\alpha) \sin(\beta) + F = 0 \\ \Sigma F_{iy} = 0 \implies R_{By} + R_{Ay} - S \cos(\alpha) \cos(\beta) = 0 \\ \Sigma F_{iz} = 0 \implies R_{Bz} + R_{Az} - G + S \sin(\alpha) = 0 \\ \Sigma M_{ix} = 0 \implies -G \frac{a}{2} + S \sin(\beta) = 0 \\ \Sigma M_{iy} = 0 \implies -R_{Bz} b + G \frac{b}{2} - S \sin(\alpha) b = 0 \\ \Sigma M_{iz} = 0 \implies R_{By} b - F a = 0 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań otrzymujemy wartości wszystkich sześciu niewiadomych.

### Więcej przykładów:

Reakcje w układzie bloczka z drzwiami – [link](#)

Reakcje obciążonego wózka trójkołowego – [link](#)

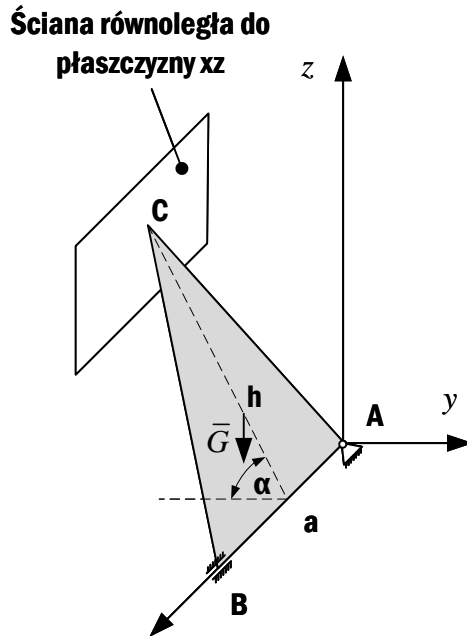
Reakcje płyty i prostopadłościanu – [link](#)

## 1 Zadanie

Wyznacz reakcje więzów płyty obciążonej jak na rysunku.

Dane:

$G, h, a, \alpha$



## 2 Zadanie

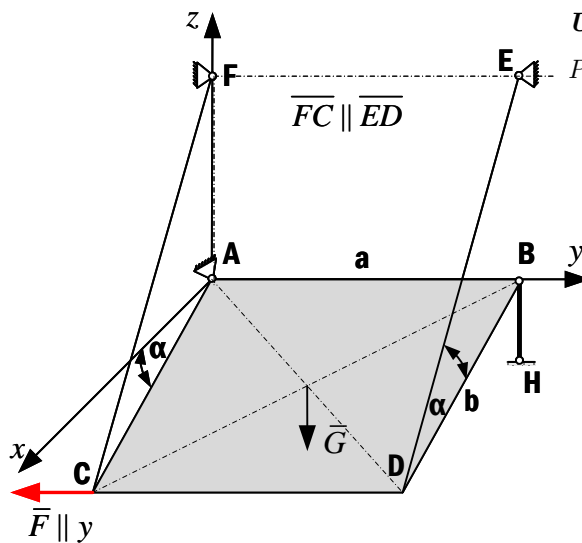
Wyznacz wartości reakcji więzów obciążonej płyty jak na rysunku.

Dane:

$G, a, b, F, \alpha$

Uwaga!

Proszę zwrócić uwagę jak podane są kąty!

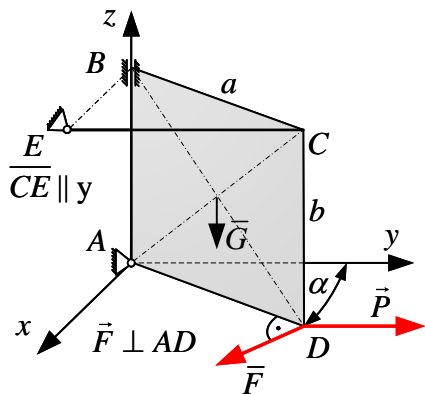


### 3 Zadanie

Wyznacz wartości reakcji więzów obciążonej płyty jak na rysunku.

**Dane:**

$F, P, G, a, b, \alpha$

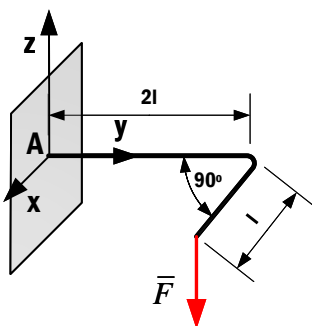


### 4 Zadanie

Wyznacz wartości reakcji utwierdzenia zakrzywionego lekkiego pręta jak na rysunku.

**Dane:**

$F, l$



## 5 Zadanie

Wyznacz wartości reakcji więzów obciążonej płyty jak na rysunku.

**Dane:**

$$P = 2kN$$

$$F = 6kN$$

$$G = 2kN$$

$$a = 0,6m$$

$$b = 0,4m$$

$$\alpha = 30^\circ$$

