

---

# Środkowy płaski układ sił

---

**dr inż. Sebastian Pakuła**

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

e-mail: [spakula@agh.edu.pl](mailto:spakula@agh.edu.pl)  
<http://home.agh.edu.pl/~spakula/>

## Przykład

Jednorodny pręt o długości  $2l$  i ciężarze  $P$  opiera się końcem  $A$  o gładką pionową ścianę. W punkcie  $B$  opiera się o występ znajdujący się w odległości  $b$  od ściany. Wyznacz reakcje w punktach  $A$  i  $B$  oraz wartość kąta  $\alpha$  w położeniu równowagi.

**Dane:**

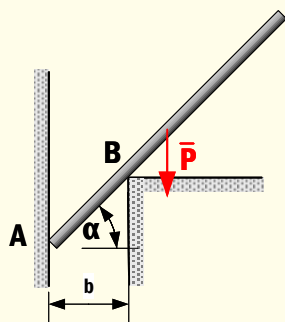
$$P = 40N$$

$$b = 1m$$

$$l = 2m$$

**Szukane:**

$$R_A, R_B, \alpha$$



## Rozwiązanie

W pierwszym etapie uwalniamy układ od więzów. Oznacza to, że fizyczne więzy tj. ściany, wsporniki, przeguby i inne elementy ograniczające ruch punktu, zastępujemy siłami reakcji. Swobodne gładkie podparcie traktujemy jako podporę przesuwczą, a więc reakcja jest prostopadła do podłoża. W przypadku oparcia o krawędź reakcja jest prostopadła do powierzchni, która się o tę krawędź opiera. W przypadku oparcia belki ze ścianą w punkcie  $A$ , reakcja będzie prostopadła do ściany, ale w przypadku oparcia belki o krawędź w punkcie  $B$ , reakcja będzie prostopadła do belki. Na rysunku umieszczamy siły, które oddziałują na belkę. Oczywiście takie same siły, lecz o przeciwnym zwrocie oddziałują na ścianę i krawędź (zgodnie z III zasadą dynamiki Newtona). Nas jednak interesuje równowaga belki, a więc także siły które nań oddziałują.



Na rysunku po lewej stronie narysowaliśmy układ sił po uwolnieniu od więzów. Jeśli w układzie występują tylko trzy siły, aby ciało pozostało w spoczynku, muszą one czynić zadość "Twierdzeniu o trzech siłach".

**Twierdzenie o trzech siłach:** Jeśli na ciało działają trzy nierównoległe siły i ciało to pozostaje w spoczynku, to proste działania sił muszą przecinać się w jednym punkcie, a ich suma geometryczna musi być równa 0 (tworzą trójkąt sił).

Proszę więc zauważyć, że na rysunku proste działania sił przecinają się w punkcie oznaczonym

jako  $C$ . Po prawej stronie znajduje rysunek bez narysowanych sił, lecz z zamieszczonymi parametrami geometrycznymi. Dzięki tej geometrii możemy wyznaczyć kąt  $\alpha$  pod jakim ułoży się belka w stanie równowagi. Zależności geometryczne:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{h}{b} \\ \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{x}{h} \\ b + x = l \cos(\alpha) \end{cases}$$

Pierwsze dwa równania wynikają z odpowiednio z trójkątów  $\triangle ABD$  oraz  $\triangle ABC$ , zaś ostatnie z trójkąta  $\triangle ASC$ . Mnożąc stronami dwa pierwsze równania otrzymujemy:

$$\operatorname{tg}^2(\alpha) = \frac{x}{b} \Rightarrow x \cos^2(\alpha) = b \sin^2(\alpha) = b - b \cos^2(\alpha)$$

Przenosząc  $b \cos^2(\alpha)$  na lewą stronę:

$$(b + x) \cos^2(\alpha) = b$$

$b + x = \frac{b}{\cos^2(\alpha)}$  - gdzie za  $b + x$  podstawimy prawa stronę trzeciego z równań geometrycznych tj.  $l \cos(\alpha)$ .

$$l \cos(\alpha) = \frac{b}{\cos^2(\alpha)}$$

stąd:

$$\cos(\alpha) = \sqrt[3]{\frac{b}{l}}$$

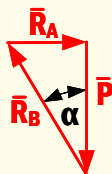
$$\alpha = \arccos\left(\sqrt[3]{\frac{b}{l}}\right) = 37,47^\circ$$

Następnie możemy obliczyć wartości sił, z trójkąta sił przedstawionego na rysunku poniżej.

Zależności geometryczne:

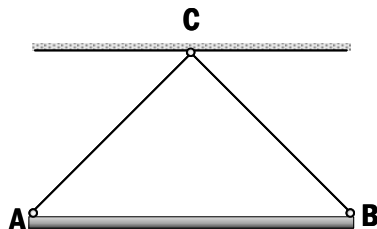
$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{R_A}{P} \implies R_A = P \operatorname{tg}(\alpha) = 30,65 \text{ N}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{P}{R_B} \implies R_B = \frac{P}{\cos(\alpha)} = 50,4 \text{ N}$$



### 1 Zadanie

Belka o długości  $2l$  i ciężarze  $Q$  zawieszona jest na dwóch cięgnach o długości  $1.5l$  przywiązanych do końców tej belki jak pokazano na poniższym rysunku. Wyznacz siły naciągu cięgien podtrzymujących belkę.



### 2 Zadanie

Belka  $AB$  o ciężarze  $G$  i długości  $l$  zamocowana jest przegubowo w punkcie  $A$  oraz przy pomocy cięgna w punkcie  $B$  przymocowanego do sufitu, tworzącego z poziomem kąt  $\alpha$ . Wyznacz wartości siły naciągu cięgna oraz siły reakcji w przegubie  $A$ .

Dane:  $G, l, \alpha$

Szukane:  $S, R_A$

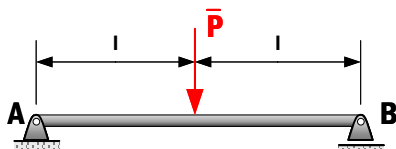


### 3 Zadanie

Lekka belka  $AB$  o długości  $2l$  zamocowana jest przegubowo w punkcie  $A$  oraz przy pomocy podpory przesuwnej w punkcie  $B$ . Na środek belki oddziałuje pionowa siła  $P$  skierowana w dół. Wyznacz wartości sił reakcji podpór.

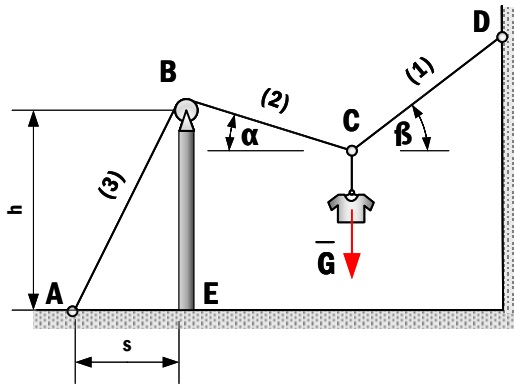
Dane:  $P, l$

Szukane:  $R_A, R_B$



#### 4 Zadanie

Na końcu słupa  $BD$  znajduje się niewielki krążek, przez który przeciągnięta jest sznurek na pranie  $ABD$ . W pewnej odległości na odcinku  $BC$  na sznurku, została powieszona mokra koszula o ciężarze  $G$ . Po obciążeniu sznurek  $BC$  tworzył z poziomem kąt  $\alpha$ , a sznurek  $CD$  kąt  $\beta$ . Oblicz siły naciągu sznurków (1), (2), (3), a także reakcje w łożysku krążka  $B$ .



**Dane:**

$$G = 70\text{N}$$

$$a = 4\text{m}$$

$$h = 10\text{m}$$

$$\beta = 45^\circ$$

$$\alpha = 30^\circ$$

**Szukane:**

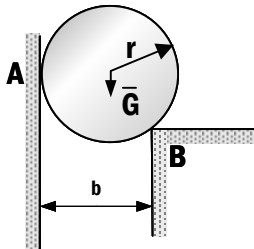
$$S_1, S_2, S_3, R_B$$

#### 5 Zadanie

Kula o ciężarze  $G$  i promieniu  $r$  utkwiała w szczelinie o szerokości  $b$  opierając się o ścianę w punkcie  $A$  i o krawędź w punkcie  $B$ . Wyznacz siły reakcji ściany oraz krawędzi.

**Dane:**  $G, r, b$

**Szukane:**  $R_A, R_B$

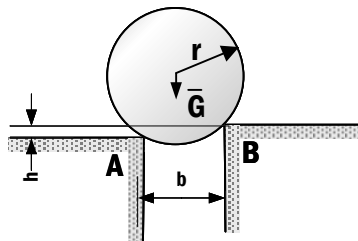


## 6 Zadanie

Podobnie jak w zadaniu wcześniejszym kula o ciężarze  $G$  i promieniu  $r$  utkwiała w szczelinie o szerokości  $b$  opierając się o krawędzie w punktach  $A$  i  $B$  znajdujących się na różnych poziomach różniących się o wartość  $h$ . Wyznacz siły reakcji krawędzi oddziałujących na kulę.

**Dane:**  $G, r, b, h$

**Szukane:**  $R_A, R_B$



## 7 Zadanie

Latarnia uliczna o ciężarze  $G = 300N$  zawieszona jest na pionowym słupie za pomocą poziomej poprzeczki  $AC = 1,6m$  oraz ukośnego pręta  $AB = 1,2m$ . Oblicz siły reakcji prętów  $S_1$  oraz  $S_2$ , jeżeli połączenia w punktach  $A, B, C$  są przegubowe.

**Dane:**

$$G = 300N$$

$$AC = 1,6m$$

$$AB = 1,2m$$

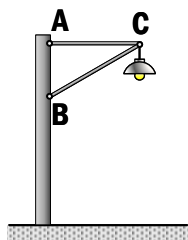
**Szukane:**  $S_1, S_2$

*Odp.:*

$$S_1 = 400N$$

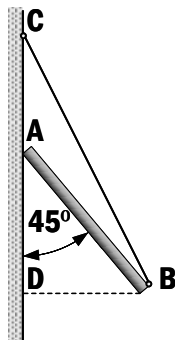
$$S_2 = -500N$$

Możliwe na egzaminie



## 8 Zadanie

Górny koniec  $A$  jednorodnej belki  $AB$  o długości  $l = 2m$  i ciężarze  $Q = 500N$  opiera się na gładkiej pionowej ścianie. Do dolnego końca  $B$  przymocowana jest linka  $BC$ . Obliczyć, w jakiej odległości  $AC$  należy przymocować linkę do ściany, aby belka, znajdująca się w równowadze, tworzyła ze ścianą kąt  $\angle BAD = 45^\circ$ . Znaleźć siłę  $S$  w linie i reakcje  $R$  ściany.



**Dane:**

$$Q = 500N$$

$$l = 2m$$

**Szukane:**  $|AC|$ ,  $|AD|$ ,  $T$ ,  $R$

*Odp.:*

$$|AD| = |AD| = 1,41m$$

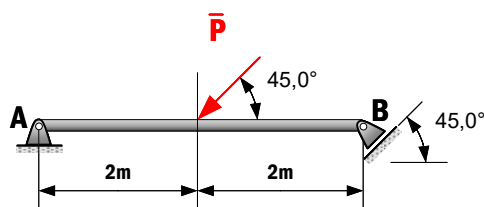
$$T = -560N$$

$$R = 250N$$

Możliwe na egzaminie

## 9 Zadanie

Koniec  $A$  belki umocowany jest przegubowo, koniec  $B$  zaś wsparty jest na wałkach. W środku belki zaczepiona jest siła  $P = 20kN$ , działająca pod kątem  $45^\circ$  do jej osi. Biorąc wymiary z rysunku, wyznaczyć reakcje podpór  $A$  i  $B$ . Ciężar własny belki pominąć.



**Dane:**

$$P = 20kN$$

**Szukane:**  $R_A$ ,  $R_B$

*Odp.:*

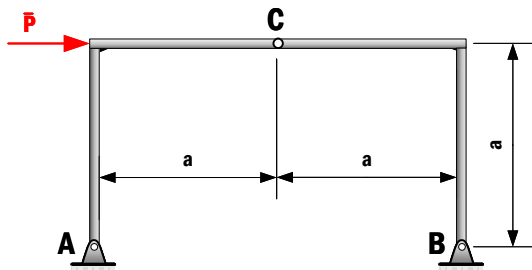
$$R_A = 22,4kN$$

$$R_B = 10kN$$

Możliwe na egzaminie

## 10 Zadanie

Dla trójprzegubowej ramy  $ACB$  pokazanego na rysunku wyznaczyć reakcje podpór  $A$  i  $B$  powstające pod działaniem poziomej siły  $P$ .



**Dane:**

$P, a$

**Szukane:**  $R_A, R_B$

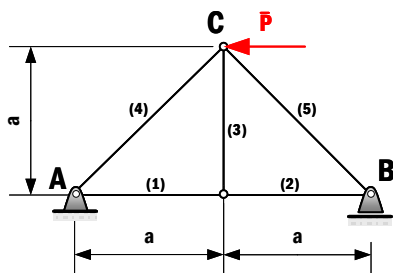
*Odp.:*

$$R_A = R_B = R \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Możliwe na egzaminie

## 11 Zadanie

Kratownica złożona z pięciu prętów jak na rysunku została obciążona poziomą siłą  $P$  przyłożoną do węzła  $C$ . Oblicz siły reakcji w podporach  $A$  i  $B$  oraz siły reakcji wszystkich prętów kratownicy  $S$ .



**Dane:**

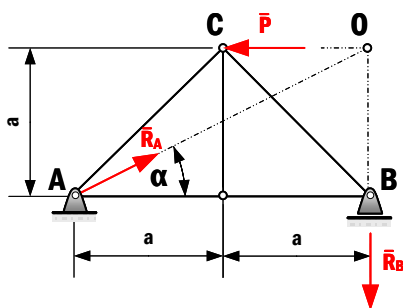
$P = 5kN$

$a = 2m$

**Szukane:**

$R_A, R_B, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$

**Rozwiązanie:**



**Odpowiedzi:**

$$R_A = 5,59kN$$

$$R_B = 2,4kN$$

$$S_1 = -2,5kN$$

$$S_2 = -2,5kN$$

$$S_3 = 0kN$$

$$S_4 = -3,54kN$$

$$S_5 = 3,54kN$$



## 12 Zadanie

Wyznacz wartości sił reakcji prętów i podpór kratownicy  $S$ .

Dane:

$$P = 5kN$$

$$a = 2m$$

Szukane:  $R_A, R_B, S_i$

