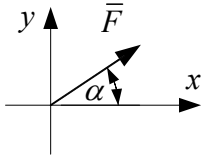


Wektory: (rzutowanie, wypadkowa, twierdzenie o 3 siłach)

1. Oblicz składowe wektorów

Dane: $F = 200\text{ N}$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 15^\circ$

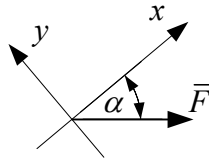
a)



$$F_x = 173,21\text{ N}$$

$$F_y = 100\text{ N}$$

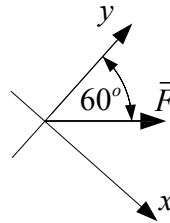
b)



$$F_x = 173,21\text{ N}$$

$$F_y = -100\text{ N}$$

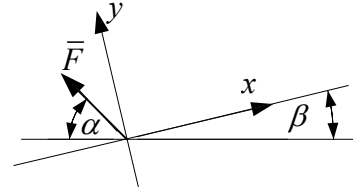
c)



$$F_x = 173,21\text{ N}$$

$$F_y = 100\text{ N}$$

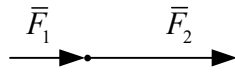
d)



$$F_x = -141,42\text{ N}$$

$$F_y = 141,42\text{ N}$$

2. Oblicz i narysuj wypadkową siłę działającą w układzie. (sumę wektorów)



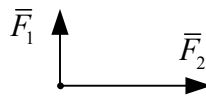
$$F_1 = 50\text{ N}$$

$$F_2 = 60\text{ N}$$

$$W_g = 110\text{ N}$$

$$W_{gx} = 110\text{ N}$$

$$W_{gy} = 0$$



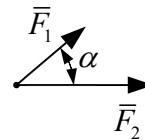
$$F_1 = 30\text{ N}$$

$$F_2 = 40\text{ N}$$

$$W_g = 50\text{ N}$$

$$W_{gx} = 40\text{ N}$$

$$W_{gy} = 30\text{ N}$$



$$F_1 = 50\text{ N}$$

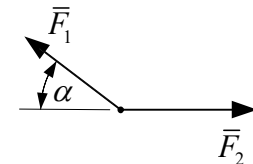
$$F_2 = 100\text{ N}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$W_g = 145,47\text{ N}$$

$$W_{gx} = 143,3\text{ N}$$

$$W_{gy} = 25\text{ N}$$



$$F_1 = 30\text{ N}$$

$$F_2 = 70\text{ N}$$

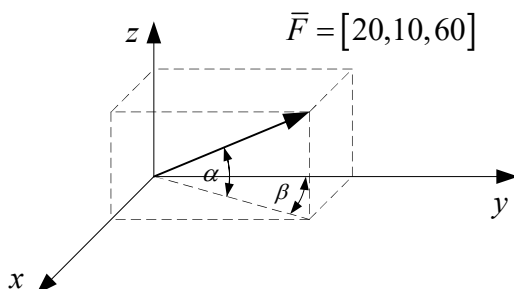
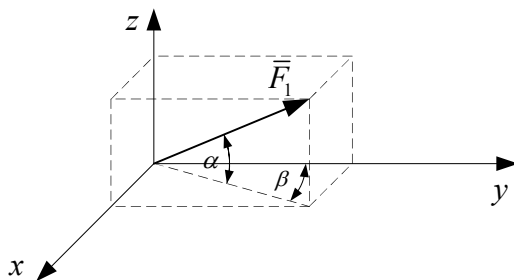
$$\alpha = 30^\circ$$

$$W_g = 46,5\text{ N}$$

$$W_{gx} = 44,02\text{ N}$$

$$W_{gy} = 15\text{ N}$$

3. Rzutowanie w układzie przestrzennym



Dane:

$$F = 120\text{ N}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\beta = 30^\circ$$

$$F_x = F \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$F_y = F \cos(\alpha) \cos(\beta)$$

$$F_z = F \sin(\alpha)$$

Wyznacz kąty jakie wektor tworzy z osiami $(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$ oraz kąty α, β

$$\cos(\varphi_x) = \frac{20}{|\vec{F}|} = \frac{20}{\sqrt{20^2 + 10^2 + 60^2}}$$

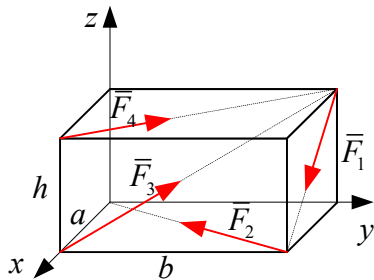
$$\cos(\varphi_y) = \frac{10}{|\vec{F}|} = \frac{10}{\sqrt{20^2 + 10^2 + 60^2}}$$

$$\cos(\varphi_z) = \frac{60}{|\vec{F}|} = \frac{60}{\sqrt{20^2 + 10^2 + 60^2}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{20^2 + 10^2}}{\sqrt{20^2 + 10^2 + 60^2}}$$

$$\cos(\beta) = \frac{10}{\sqrt{20^2 + 10^2}}$$

4. Oblicz wektor główny sił w układzie na rysunku.



Dane:

$$F_1 = 20N \quad F_2 = 40N \quad F_3 = 12N \quad F_4 = 22N$$

$$a = 1m \quad b = 3m \quad h = 2m$$

Szukane:

$$W_g = ?$$

5. Oblicz wypadkową siłę w układzie przestrzennym.

Dane są siły w układzie przestrzennym. Wyznacz współrzędne wypadkowej tych sił.

a) $\vec{F}_1 = [20, 34, -92], \vec{F}_2 = [-10, 2, 0], \vec{F}_3 = [3, -15, 66] \quad \vec{W} = [13, 21, -26]$

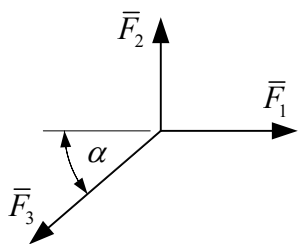
b) $\vec{F}_1 = [-30, 14, 22], \vec{F}_2 = [-12, -12, 19], \vec{F}_3 = [32, 8, -6] \quad \vec{W} = [-10, 10, 35]$

c) $\vec{F}_1 = [0, 4, -2], \vec{F}_2 = [-1, 45, 8], \vec{F}_3 = [11, -25, -19] \quad \vec{W} = [10, 26, -13]$

W którym układzie działa największa wypadkowa siła, a w którym najmniejsza?

6. Twierdzenie o 3 siłach

Sprawdź czy w układzie występuje równowaga sił:

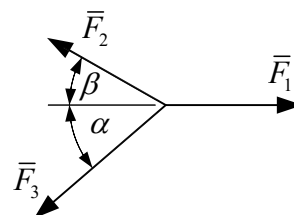


$$F_1 = 3N$$

$$F_2 = 4N$$

$$F_3 = 5N$$

$$\alpha = 53^\circ$$



$$F_1 = 100N$$

$$F_2 = 86,6N$$

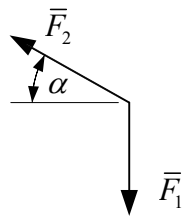
$$F_3 = 50N$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\beta = 30^\circ$$

7. Jaką siłę \vec{F}_3 należy przyłożyć do układu, aby zachodziła równowaga sił?

(podaj wartość i kąt z osią x)

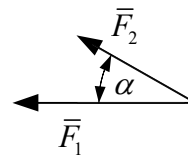


$$F_1 = 20N$$

$$F_2 = 34N$$

$$\alpha = 35^\circ$$

$$F_3 = 21,023N$$



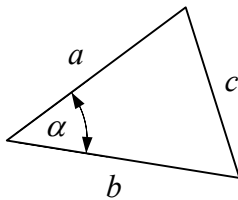
$$F_1 = 20N$$

$$F_2 = 34N$$

$$\alpha = 35^\circ$$

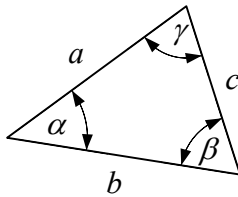
$$F_3 = 51,802N$$

Twierdzenie cosinusów:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

Twierdzenie sinusów:



$$\frac{a}{\sin \beta} = \frac{b}{\sin \gamma} = \frac{c}{\sin \alpha}$$

Własności iloczynu skalarnego $\vec{a} \cdot \vec{b}$

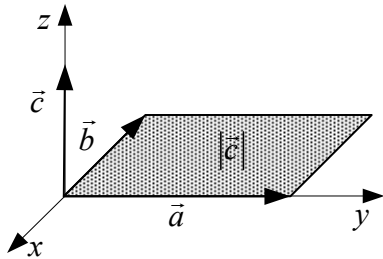
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Cosinus kąta między wektorami a i b jest równy:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Jeśli $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ to oznacza, że wektory są do siebie **prostopadle**.

Własności iloczynu wektorowego $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$



$|\vec{c}|$ – długość wektora c jest równa polu równoległoboku zbudowanego z wektorów a i b.

Jeśli: $\vec{a} = [1, 2, 5]$ $\vec{b} = [2, 5, -7]$ to $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

$$c_x = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -14 - 25 = -39$$

$$c_y = - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -(-7 - 10) = 17$$

$$c_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1$$

$$\vec{c} = [-39, 17, 1]$$

Sprawdźmy czy wektor \vec{c} jest prostopadły do wektorów \vec{a} i \vec{b} .

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot (-39) + 2 \cdot 17 + 5 \cdot 1 = -39 + 34 + 5 = 0 \quad - \text{są prostopadłe}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-39) + 5 \cdot 17 - 1 \cdot 7 = -78 + 85 - 7 = 0 \quad - \text{są prostopadłe}$$